

Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik

vom 28. bis 31. März 1951 in Freiburg i. Br.

VORTRAGSBERICHTE

A. Praktische Analysis

Ergebnisse neuer Versuche zur Periodenanalyse, die im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo ausgeführt wurden

Von *Mauro Picone* und *Fabio Conforto* in Rom

Sei $f(t)$ eine empirisch gegebene reell- oder komplexwertige Funktion im Intervalle $-1 \leq t \leq +1$. Die Periodenanalyse der Funktion $f(t)$ bedeutet hier folgendes: Bestimmung der ersten natürlichen Zahl n und der Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, z_1, z_2, \dots, z_n$, so daß die Ungleichung

$$\left| f(t) - \sum_{h=1}^n \gamma_h e^{z_h t} \right| < \varepsilon \quad \dots \dots \dots (1)$$

gilt.

Die Zahl ε ist dabei eine bekannte positive Konstante, die mit der Genauigkeit der Versuche zusammenhängt, so daß der wirkliche Wert der Funktion $f(t)$ zwischen $f(t) - \varepsilon$ und $f(t) + \varepsilon$ liegt.

Im folgenden wird eine Methode zur Periodenanalyse kurz skizziert. Zuerst sei folgendes bemerkt: Da $f(t)$ nur empirisch gegeben ist, darf man nie mit Ableitungen von $f(t)$ rechnen. Wohl kann man dagegen von bestimmten Integralen von $f(t)$ oder des Produktes von $f(t)$ mit bekannten Funktionen sprechen. Die Zahl n darf nie zu groß sein. Die Methode ist nun die folgende:

Hätte man exakt

$$f(t) = \sum_{h=1}^n \gamma_h e^{z_h t},$$

so wäre $f(t)$ Lösung einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{h=0}^n c_h f^{(h)}(t) = 0 \quad (c_n = 1) \quad \dots \dots \dots (2).$$

Ist nun $\varphi_s(t)$ ($s = 1, 2, \dots$) ein im Hilbertschen Sinne vollständiges System von Funktionen im Intervalle $[-1, +1]$, so ist die Gl.(2) äquivalent den Gleichungen:

$$\int_{-1}^1 \varphi_s(t) \sum_{h=0}^n c_h f^{(h)}(t) dt = 0 \quad (s = 1, 2, \dots),$$

die man nach einer gewissen Anzahl von partiellen Integrationen auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_s^{(i-1)}(1) \cdot \beta_i + \sum_{i=1}^n \varphi_s^{(i-1)}(-1) \cdot \alpha_i + \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h c_h \int_{-1}^1 \varphi_s^{(h)}(t) f(t) dt = (-1)^{n-1} \int_{-1}^1 \varphi_s^{(n)}(t) f(t) dt \\ (s = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

mit

$$(-1)^{i-1} \sum_{h=i}^n c_h f^{(h-i)}(1) = \beta_i, \quad -(-1)^{i-1} \sum_{h=i}^n c_h f^{(h-i)}(-1) = \alpha_i.$$

Ist aber $f(t)$ nur empirisch gegeben, so kann man ohne Weiteres die Integrale in (3) berechnen, aber nicht die Konstanten α_i und β_i , da in diesen auch Werte der Ableitungen von $f(t)$ für $t = \pm 1$

vorkommen. Man betrachtet daher einfach die α_i, β_i in (3) als neue Unbekannte. Formel (3) ist dann ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit $3n$ Unbekannten, nämlich α_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) und c_h ($h = 0, 1, \dots, n-1$).

Die Koeffizientenmatrix des Systems (3) hat genau den Rang $3n$, wenn z.B. $\varphi_s(t) = e^{\lambda_s t}$ gesetzt wird und die Folge der λ_s die Eigenschaft hat:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_s = +\infty, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_s = -\infty \quad \dots \quad (4)$$

vorausgesetzt, daß $f(t)$ nicht schon einer linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten einer Ordnung $m < n$ genügt.

Die Folge der λ_s kann z.B. die Folge $0, -1, +1, -2, +2, -3, \dots$ sein. Zusammenfassend kann man also für jedes empirisch gegebene $f(t)$ das System (3) betrachten, mit $\varphi_s(t) = e^{\lambda_s t}$, wobei für die Folge der λ_s die Gl.(4) gelten.

Zahlreiche numerische Versuche, die in Rom im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo ausgeführt wurden, haben nun gezeigt, daß das mit der Methode der kleinsten Quadrate gelöste System einer zunehmenden Anzahl p von Gl.(3) tatsächlich die richtigen Werte der c_h ($h = 0, 1, \dots, n-1$) liefert für immer größer werdendes p , falls solche Werte bekannt sind.

Sind daher die c_h ($h = 0, 1, \dots, n-1$) unbekannt und $f(t)$ empirisch gegeben, so liegt es nahe, das System von p Gleichungen des Systems (3) mit der Methode der kleinsten Quadrate zu lösen für $n = 1, 2, \dots$. Ist n die erste Zahl, für welche für zunehmendes p die c_h gegen bestimmte Konstanten c_h konvergieren, so kann man vermuten, daß $f(t)$ sehr nahe an einem Integral der mit diesen c_h gebildeten Differentialgleichung (2) ist. Man findet daher die Wurzeln z_h ($h = 1, 2, \dots, n$) der charakteristischen Gleichung dieser Differentialgleichung und bestimmt dann die γ_h durch Lösung mit der Methode der kleinsten Quadrate einer zunehmenden Anzahl p von Gleichungen des Systems:

$$\int_{-1}^1 e^{\lambda_s t} f(t) dt = \sum_{h=1}^n \gamma_h \int_{-1}^1 e^{\lambda_s t} e^{z_h t} dt \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Konvergiert für zunehmendes p die Lösung dieses Systems gegen gewisse γ_h , so sind die γ_h und z_h bestimmt, und man kann in numerischer Weise probieren, ob (1) erfüllt ist. Ist (1) erfüllt, so ist die Periodenanalyse erledigt; im entgegengesetzten Falle kann man mit $n+1$, und dann mit $n+2$ usw. probieren. Wird aber n zu groß, so muß man eine Periodenanalyse für $f(t)$ als unmöglich betrachten.

Einige neuere Forschungen über numerische Behandlung von Differentialgleichungen

Von L. Collatz in Hannover

Hier können nur die Ideen einiger neuerer Methoden angedeutet werden; wegen ausführlicherer Darstellungen muß auf die Literatur verwiesen werden. Vollständigkeit ist nicht angestrebt.

I. Ausbau einiger spezieller Methoden

1. Differenzenverfahren

a) Iterative Lösung. In letzter Zeit wurden die iterativen Methoden zur Lösung der bei kleiner Maschenweite umfangreichen Gleichungssysteme, insbesondere Relaxationsmethoden, viel verwendet und ausgebaut¹⁾.

b) Nichtiterative Lösung. Hyman²⁾ hat eine Methode aufgestellt, die am Beispiel der 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie bei einem Rechtecksbereich $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ erläutert werde. Es seien für eine Lösung $u(x, y)$ der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ die Randwerte auf dem Rechtecksrande Γ vorgegeben. Bei einem Gitter mit den Maschenweiten h, l und den Gitterpunkten

$$x_j = jh, \quad y_k = kl, \quad h = \frac{a}{M+1}, \quad l = \frac{b}{N+1}, \quad (j = 0, 1, \dots, M+1; k = 0, 1, \dots, N+1) \quad (1)$$

¹⁾ Aus der umfangreichen Literatur sei nur genannt: R. V. Southwell: Relaxation methods in Engineering Science, Oxford 1934, Relaxation methods in Theoretical Physics, Oxford 1946; L. Fox: Some improvements in the use of relaxation methods, Proc. roy. Soc. London 190 (1947), S. 31–59; G. M. Dusenberre: Numerical Analysis of Heat Flow, New York, Toronto, London 1949.

²⁾ M. Hyman: On the Non-Iterative Numerical Solution of Boundary Value Problems. Vortrag Washington, April 1950.

haben die Differenzengleichungen Partikularlösungen der Form

$$\sin \frac{n\pi j h}{a} \lambda^k \dots \dots \dots (2),$$

wobei λ aus einer quadratischen Gleichung zu bestimmen ist; man findet

$$\lambda = \{\lambda_{1n}\}_{\lambda_{2n}} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1} \quad \text{mit} \quad \mu = 1 - \left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\cos \frac{n\pi h}{a} - 1\right).$$

Durch Überlagerung erhält man eine Partikularlösung

$$\sum_{n=1}^M \sin \frac{n\pi j h}{a} (P_n \lambda_{1n}^k + Q_n \lambda_{2n}^k),$$

welche auf den Rechtecksseiten $x=0$ und $x=a$ verschwindet und auf $y=0$ und $y=b$ die vorgegebenen Randwerte annimmt, sofern man die P_n und Q_n passend bestimmt (dazu ist nur harmonische Analyse nötig, die nach den bekannten Verfahren von Runge usw. durchgeführt werden kann). Durch Überlagerung mit der entsprechenden Partikularlösung, die auf $x=0$ und $x=a$ die vorgegebenen Randwerte annimmt, gewinnt man die exakte Lösung der Differenzengleichungen. Das Verfahren ist auch bei anderen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (Potentialgleichung in drei Dimensionen, Plattengleichung usw.), bei der 2. und 3. Randwertaufgabe und bei Hinzunahme der Kollokation (vgl. hier Nr. 2a) auch bei krummlinigen Rändern anwendbar.

c) Mehrstellenverfahren. Bei der linearen Differentialgleichung m -ter Ordnung

$$L[u] = \sum_{p+q \leq m} A_{pq}(x, y) \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} = r(x, y) \dots \dots \dots (3)$$

macht man bei Zugrundelegung eines etwa rechteckigen Gitters wie in (1) einen Ansatz:

$$\Phi = \sum_{i, \kappa} \{C_{i, \kappa} u_{i, \kappa} + D_{i, \kappa} (L[u])_{i, \kappa}\} \dots \dots \dots (4),$$

wobei $u_{i, \kappa}$ bzw. $(L[u])_{i, \kappa}$ den Wert von u bzw. $L[u]$ an der Gitterstelle x_i, y_{κ} bedeutet, die Summe über eine noch zu wählende Anzahl von Gitterpunkten zu erstrecken ist und die $C_{i, \kappa}$ und $D_{i, \kappa}$ so zu bestimmen sind, daß bei Taylorentwicklung von Φ nach u und den partiellen Ableitungen an einer festen Gitterstelle i_0, κ_0 die Faktoren von u und deren Ableitungen bis zu möglichst hoher Ordnung verschwinden; man erhält dann eine Näherungsgleichung $\Phi=0$, wenn man $u_{i, \kappa}$ durch Näherungswerte $U_{i, \kappa}$ und $L[u]$ durch r ersetzt. Das gewöhnliche Differenzenverfahren ordnet sich hier ein, wenn man nur eine Größe D_{i_0, κ_0} verwendet und alle anderen $D_{i, \kappa}=0$ setzt.

Das Mehrstellenverfahren³⁾ hat bei einfach gebauten Differentialgleichungen gegenüber dem gewöhnlichen Differenzenverfahren den Vorzug, bei nur unwesentlich vergrößerter Rechenarbeit im allgemeinen zu genaueren Ergebnissen zu führen. Das Verfahren wurde auf verschiedene Differentialgleichungen angewendet, z. B. auf partielle Differentialgleichungen 4. Ordnung der Plattenbiegung⁴⁾, auf parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen; um nur einen Ausdruck zu nennen, sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$-K \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r$$

herausgegriffen. In dem Gitter (1) erhält man für u bei konstantem K und r die Beziehung

$$U_{j, k+1} = \frac{2(U_{j+1, k} + U_{j-1, k}) + U_{j, k-1}}{5} - \frac{6}{5} \frac{l}{K} r + \text{Restglied 4. Ordnung} \dots (5).$$

Bei komplizierteren Differentialgleichungen wird die Durchführung des Mehrstellenverfahrens mühsam; z. B. hätte man an sich bei

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^n p_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x) = r(x)$$

für jede Ableitung $y^{(\nu)}(x)$ die Ausdrücke des Mehrstellenverfahrens aufzustellen und erhielte bei m Abszissen ein Gleichungssystem für (größenordnungsmäßig) $n \cdot m$ Unbekannte. Durch Umschreibung der Differentialgleichung in eine Form, wo an Stelle der Ableitungen wiederholte Integrale über $y(x)$ mit gewissen Faktoren auftreten, gelingt es Sassenfeld⁵⁾, auch hier ein Gleichungssystem für nur m Unbekannte aufzustellen.

³⁾ Eine allgemeine Darstellung bei L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin 1951, S. 116, 235, 311.

⁴⁾ Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 385–388.

⁵⁾ Sassenfeld: Ein Summenverfahren für Rand- und Eigenwertaufgaben linearer Differentialgleichungen. Vortrag Freiburg 30. März 1951. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 240–241.

d) Verallgemeinerung des Mehrstellenverfahrens. Der Ansatz (4) läßt sich erweitern zu

$$\Phi = \sum_{i, \kappa} \{C_{i, \kappa} u_{i, \kappa} + D_{i, \kappa} (L[u])_{i, \kappa}\} + \sum_{i, \kappa, \mu} (M_{\mu} [L[u]])_{i, \kappa} \dots \dots \dots (6),$$

wobei M_{μ} gewählte, also gegebene Operatoren sind. In der Näherungsgleichung $\Phi=0$ ist dann auch $M_{\mu}[r]$ bekannt. Durch Hinzunahme derartiger Glieder läßt sich ein Abgleich in der Taylorentwicklung bis zu höheren Ableitungen erzielen. Die Anwendung der so entstehenden genaueren Formeln hat natürlich nur Sinn, wenn die Lösungsfunktion Ableitungen genügend hoher Ordnung besitzt. Als Beispiel seien für $L[u] = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ zwei Ausdrücke Φ angegeben, wobei als Operator M wieder Δ gewählt ist und ein quadratisches Gitter der Maschenweite h angenommen ist:

$$\Phi = 20 u_a - 4 \sum u_b - \sum u_c + \frac{h^2}{15} (82 \Delta u_a + \sum \Delta u_b + \sum \Delta u_c) + \frac{3h^4}{10} \Delta \Delta u_a = \text{Restglied 8. Ordnung},$$

$$\Phi = 20 u_a - 4 \sum u_b - \sum u_c + \frac{h^2}{5} (34 \Delta u_a - \sum \Delta u_b) + \frac{h^4}{60} (34 \Delta \Delta u_a + 2 \sum \Delta \Delta u_b) = \text{Restglied 8. Ordnung}.$$

Dabei ist a ein beliebiger Gitterpunkt, u_a der Wert von u an dieser Stelle, $\sum u_b$ bedeutet die Summe der u -Werte in den vier Nachbarpunkten, $\sum u_c$ die Summe der u -Werte in den vier vom Punkte a um $h/\sqrt{2}$ entfernten Gitterpunkten, entsprechend sind $\sum \Delta u_b$ usw. zu verstehen.

e) Gewöhnliche Differentialgleichungen im Komplexen. Salzer⁶⁾ gibt für Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung für eine gesuchte Funktion $w(z)$ Formeln an, nach denen man in einem quadratischen Gitter in der z -Ebene aus den z -Werten in einigen Gitterpunkten die z -Werte in weiteren Gitterpunkten angenähert berechnen kann.

2. Fehlerabgleichsmethoden

Für eine Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ von n unabhängigen Veränderlichen seien eine Differentialgleichung

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_1, \dots, u_n, u_{11}, \dots, u_{nn}, \dots) = 0 \quad \text{in } \mathfrak{B} \dots \dots \dots (7)$$

und Randbedingungen

$$V_{\mu}(x_1, \dots, x_n, u, u_1, \dots, u_n, u_{11}, \dots, u_{nn}, \dots) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{\mu} (\mu = 1, \dots, k) \dots \dots (8)$$

vorgelegt (die Γ_{μ} können ganz oder teilweise zusammenfallen). Bei u und in (10) bei w bedeuten Indizes partielle Ableitungen, z.B. $u_{jk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$; \mathfrak{B} ist ein gegebener Bereich des $x_1 \dots x_n$ -Raumes, Γ_{μ} sind $(n-1)$ -dimensionale „Hyperflächen“, F und V_{μ} sind gegebene Funktionen ihrer Argumente; ein Näherungsansatz für u

$$u \approx w(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p) \dots \dots \dots (9)$$

sei so gewählt, daß er für beliebige a_{ϱ} entweder (Fall 1) die Differentialgleichung oder (Fall 2) die Randbedingungen exakt erfüllt. Die a_{ϱ} sind dann so zu bestimmen, daß im Fall 1 die Randbedingungen und im Fall 2 die Differentialgleichung möglichst gut erfüllt werden. Im Fall 1 spricht man von einer Randmethode, im Fall 2 von einer Gebietsmethode. Es werde etwa Fall 2 genauer beschrieben, in Fall 1 hat man Differentialgleichung und Randbedingungen sinn gemäß zu vertauschen. Beim Einsetzen von w in die Differentialgleichung bleibt eine Fehlerfunktion ε übrig

$$\varepsilon(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p) = F(x_1, \dots, x_n, w, w_1, \dots, w_n, w_{11}, \dots, w_{nn}, \dots) \dots \dots (10).$$

Die a_{ϱ} sollen so bestimmt werden, daß die Fehlerfunktion ε möglichst gut die Funktion Null annähert. Von den verschiedenen Möglichkeiten seien einige genannt:

a) Kollokation. Der Fehler ε soll in p Punkten P_1, \dots, P_p , den „Kollokationspunkten“ verschwinden. Die p Punkte versucht man einigermaßen gleichmäßig über den Bereich \mathfrak{B} zu verteilen. Sind $x_{1\varrho}, \dots, x_{n\varrho}$ die Koordinaten von P_{ϱ} , so lauten die Bestimmungsgleichungen für die a_{ϱ} :

$$\varepsilon(x_{1\varrho}, \dots, x_{n\varrho}, a_1, \dots, a_p) = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, p) \dots \dots \dots (11).$$

Es wäre wichtig, über die zweckmäßige Wahl der Kollokationspunkte Untersuchungen anzustellen.

b) Kollokation mit Ableitungen. Die Rechnung wird zuweilen einfacher, wenn man nicht ε an p Kollokationspunkten gleich Null setzt, sondern nur an q Stellen, an einigen Stellen (den-

⁶⁾ H. E. Salzer: Formulas for numerical integration of first and second order differential equations in the complex plane. J. Math. Physics 29 (1950), S. 207–216.

selben oder anderen Stellen) das Verschwinden von Ableitungen von ε verlangt, und so insgesamt p Bestimmungsgleichungen aufstellt.

c) Gewöhnliche Fehlerquadratmethode. Man verlangt

$$J = \int_{\mathfrak{B}} \varepsilon^2 dx_1 \dots dx_n = \text{Min.} \quad (12)$$

und erhält in $\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0$ insgesamt p Bestimmungsgleichungen für die a_0 .

d) Fehlerquadratmethode mit Gewichtsfunktion⁷⁾. Es sei $p(x_1, \dots, x_n)$ eine in \mathfrak{B} positive Funktion. An Stelle von (12) tritt

$$J = \int_{\mathfrak{B}} p \varepsilon^2 dx_1 \dots dx_n = \text{Min.} \quad (13).$$

e) Fehlerorthogonalität. Der Fehler ε soll zu p gewählten, voneinander linear unabhängigen Ortsfunktionen g_1, \dots, g_p orthogonal sein:

$$\int \dots \int \varepsilon g_\varrho dx_1 \dots dx_n = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, p) \quad (14).$$

e*) Galerkinsche Gleichungen. Sind die Randbedingungen linear, so kann man für w einen Ansatz verwenden

$$w = v_0 + \sum_{\varrho=1}^p a_\varrho v_\varrho \quad (15),$$

wobei v_0 die gegebenen (inhomogenen) Randbedingungen und v_1, \dots, v_p die zugehörigen homogenen Randbedingungen erfüllen. Für $v_\varrho = g_\varrho$ ergeben sich aus (14) die Galerkinschen Gleichungen.

f) Teilgebietsmethode. Der Bereich \mathfrak{B} wird in p Teilbereiche $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_p$ aufgeteilt. Dann soll gelten

$$\int_{\mathfrak{B}_\varrho} \varepsilon dx_1 \dots dx_n = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, p) \quad (16).$$

Alle hier als Gebietsmethoden formulierten Verfahren sind, wie oben betont, auch als Randmethoden anwendbar. Die Randmethoden haben gegenüber den Gebietsmethoden den Vorzug, zu ihrer Durchführung nur die Auswertung von Randintegralen, aber nicht von Gebietsintegralen zu erfordern. (Bei der Kollokation sind keine Integrale auszuwerten, aber auch dort ist die Randkollokation angenehmer und weniger unsicher als die Gebietskollokation.) Für alle hier genannten Verfahren ist eine weitere praktische Erprobung und theoretische Durchforschung sehr erwünscht.

Für die drei wohl noch wenig verwendeten Methoden a), b), f) sei ein ganz einfaches Beispiel gegeben. Bei $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ (mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1}$) werde der die Randbedingungen erfüllende Ansatz $w = x + a_1(x^2 - x) + a_2(x^3 - x)$ gemacht; dann wird $\varepsilon = w'' + w = x + a_1(x^2 - x + 2) + a_2(x^3 + 5x)$. Bei Methode a) (Kollokation) setzt man $\varepsilon(x_1) = \varepsilon(x_2) = 0$ und bestimmt daraus a_1 und a_2 ; die Tabelle gibt die Werte für mehrere Wahlen von x_1 und x_2 ; bei Methode b) wird man etwa ε und ε' gleich 0 setzen an der Stelle $x = \frac{1}{2}$, und bei f) liegt es nahe,

$$\int_0^{1/2} \varepsilon dx = \int_{1/2}^1 \varepsilon dx = 0$$

zu verlangen.

		a_1	a_2	$w\left(\frac{1}{2}\right)$	Fehler von $w\left(\frac{1}{2}\right)$
a) Kollokation	$x_1 = 0, x_2 = 1$	0	-0,2	0,575	+ 0,9%
	$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}$	$-\frac{16}{899}$	$-\frac{16}{93}$	0,56897	- 0,14%
	$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$	$-\frac{9}{416}$	$-\frac{9}{52}$	0,57031	+ 0,10%
b) Kollokation mit Ableitungen	$\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \varepsilon'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$	$-\frac{4}{161}$	$-\frac{4}{23}$	0,57143	+ 0,3%
f) Teilgebietsmethode: Intervalle	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ u. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$-\frac{9}{517}$	$-\frac{8}{47}$	0,56818	- 0,3%

⁷⁾ M. Picone: Analisi quantitativa ed esistenziale nei problemi di propagazione, Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana (1937).

3. Ritzsches und Trefftzsches Verfahren

a) Gemischter Ritz-Ansatz⁸⁾.

Es sei $J[w]$ ein Integralausdruck (wie beim Ritzschen Verfahren), der für die Lösung u einer vorgelegten, etwa linearen Randwertaufgabe einen stationären Wert, z. B. ein Minimum annimmt. Beim Ritzschen Verfahren würde man für w den Ansatz (15) machen. Nun möge für eine Veränderliche, etwa x_n , in den Randbedingungen keine Differentiation nach x_n vorkommen. Dann erfüllt w in (15) auch die Randbedingungen, wenn man die a_p als noch zu bestimmende Funktionen von x_n ansieht. Die Forderung

$$J[w] = J\{a_p(x_n)\} = \text{Min.} \quad (17)$$

führt dann zu einem System Eulerscher Differentialgleichungen, und zwar zu p gewöhnlichen Differentialgleichungen für die $a_p(x_n)$.

b) Trefftzsches Verfahren.

Während das Ritzsche Verfahren eine Gebietsmethode ist, ist das Trefftzsche Verfahren eine Randmethode und fand als solche in letzter Zeit wieder mehr Beachtung. Ursprünglich von Trefftz nur für die 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie aufgestellt, wurde das Trefftzsche Verfahren auf allgemeinere Aufgaben ausgedehnt und ist auch bei der 2. und 3. Randwertaufgabe bei der elliptischen selbstadjungierten Differentialgleichung

$$L[u] = - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + qu = r \quad (18)$$

anwendbar. Dabei sind q, r gegebene, stetige und die A_{jk} stetig differenzierbare Funktionen von x_1, \dots, x_n ; für zwei mit stetigen partiellen zweiten Ableitungen versehene Funktionen φ, ψ lautet dann die Greensche Formel

$$\int_{\mathfrak{B}} (\varphi L[\psi] - \psi L[\varphi]) d\tau = - \int_{\Gamma} (\varphi L^*[\psi] - \psi L^*[\varphi]) df \quad (19).$$

Dabei ist Γ der (gewissen Glattheitsforderungen genügende) Rand eines Bereiches \mathfrak{B} , df das Oberflächenelement auf Γ , $d\tau$ das Volumenelement in \mathfrak{B} und L^* bis auf einen Faktor der Differentiationsoperator in Richtung der Konormalen⁹⁾, bei der Potentialgleichung ist die Konormale einfach die äußere Normale.

Nun sei für u die Randbedingung vorgelegt

$$A_1 u + A_2 L^*[u] = A_3 \text{ auf } \Gamma \quad (20).$$

Für u wird ein Näherungsansatz gemacht

$$u \approx w = v_0 + \sum_{\varrho=1}^p a_{\varrho} v_{\varrho} \quad (21)$$

mit $L[v_0] = r$, $L[v_0] = 0$ für $\varrho = 1, \dots, p$. Die Greensche Formel (19) liefert dann für $\varphi = u - v_0$, $\psi = v_{\varrho}$

$$\int_{\Gamma} \{(u - v_0) L^*[v_{\varrho}] - v_{\varrho} L^*[u - v_0]\} df = 0, \quad (\varrho = 1, \dots, p) \quad (22).$$

Bei der 1. Randwertaufgabe ist u am Rande gegeben; ersetzt man $L^*[u - v_0]$ angenähert durch $L^*[\sum_{\tau=1}^p a_{\tau} v_{\tau}] = \sum_{\tau=1}^p a_{\tau} L^*[v_{\tau}]$, so sind die Gleichungen (22) p lineare Bestimmungsgleichungen für die a_{τ} . Bei der 2. Randwertaufgabe ist $L^*[u]$ auf Γ bekannt und man ersetzt in (22) in der runden Klammer $u - v_0$ durch $\sum_{\tau=1}^p a_{\tau} v_{\tau}$; man erhält wieder p lineare Gleichungen für die a_{τ} . Bei der 3. Randwertaufgabe kann man $u - v_0$ und $L^*[u - v_0]$ auf Γ durch einander ausdrücken und so ebenfalls p lineare Gleichungen für die a_{τ} aufstellen¹⁰⁾.

⁸⁾ L. Kantorovic: Sur une méthode directe de la solution approximative du problème du minimum d'une intégrable double (Russisch), Leningrad, Bull. Ac. Sc. 7 (1933), S. 647—652. E. Mettler: Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ing.-Arch. 17 (1949), S. 418—449. F. Weidenhammer: Der eingespannte, axial pulsierend belastete Stab als Stabilitätsproblem. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 235—237.

⁹⁾ Vgl. A. G. Webster u. G. Szegö: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Leipzig und Berlin 1930, S. 311.

¹⁰⁾ Ähnliche Überlegungen bei M. Picone: Sur le calcul de la déformation d'un solide élastique encastré. 7. Internat. Kongress für angewandte Mechanik. London 1948 und G. Fichera: Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo, Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Sci. fis. mat. serie VIII, vol. III, sez. I, fasc. 1. Rom 1950.

II. Theoretische Durchforschung einiger bekannter Methoden.

1. Stabilität des Differenzenverfahrens

a) Wellengleichung. Der Wellengleichung mit zwei Raumkoordinaten x, y und der Zeitkoordinate z

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (23)$$

(K gegebene Konstante) entspricht in einem quaderförmigen Gitter mit den Maschenweiten h, l und den Gitterpunkten

$$x = x_i = x_0 + ih, \quad y = y_j = y_0 + jh, \quad z = z_k = z_0 + kl \quad (24)$$

die Differenzengleichung

$$U_{i,j,k+1} = \varrho (U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k} + U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k}) + (2-4\varrho) U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1} \quad (25).$$

Dabei ist $U_{i,j,k}$ ein Näherungswert für $u(x_i, y_j, z_k)$ und $l^2 = K\varrho h^2$ gesetzt. Würde man nun $\varrho = 1$, also $l = Kh^2$ wählen, so würde (25) für die numerische Rechnung unbrauchbar werden; ein kleiner Fehler ε in den U -Werten, wie er z. B. allein schon durch die Abrundung entsteht, würde sich so fortpflanzen, daß die Rechnung durch die anwachsenden Fehler völlig überdeckt werden würde (ein Fehler ε an der Stelle i, j, k würde an der Stelle $i, j, k+1$ den Fehler -2ε , an der Stelle $i, j, k+2$ den Fehler 7ε und an der Stelle $i, j, k+3$ bereits den Fehler -28ε hervorrufen). Das Verfahren wird daher „instabil“ genannt. Wählt man jedoch $\varrho = \frac{1}{2}$, so lautet (25)

$$U_{i,j,k+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k} + U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k}) - U_{i,j,k-1} \quad (26).$$

Ein Fehler ε bei $z = z_0 + kl$ verteilt sich jetzt bei größeren z -Werten und kann nicht anwachsen; das Verfahren ist jetzt „stabil“ gegenüber kleinen Störungen.

b) Einzelfehler. Den Einfluß eines Einzelfehlers ε auf die weitere Rechnung untersucht John v. Neumann¹¹⁾ für ziemlich allgemeine lineare Differentialgleichungen unter Benutzung weitreichender mathematischer Hilfsmittel.

c) Fehlerverteilung. Viel einfacher in der Durchführung (allerdings auch nicht so weitreichend) ist eine andere Methode¹²⁾, nicht von einem Einzelfehler, sondern von einer Fehlerverteilung auszugehen. Die Methode ist in einer Arbeit¹²⁾ für die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung mit einer Raumdimension durchgeführt und werde hier für die Wellengleichung (23) mit zwei Raumdimensionen beschrieben. Die zugehörige Differenzengleichung (25) hat die Partikularlösung

$$U_{i,j,k} = e^{k\xi} \sin i\xi \sin j\eta \quad (27),$$

wenn zwischen ξ, η, ζ der Zusammenhang

$$\cos \zeta - 1 = \varrho (\cos \xi + \cos \eta - 2) \quad (28)$$

besteht. Liegt etwa die Anfangs-Randwertaufgabe vor:

$$u(0, y, z) = u(a, y, z) = u(x, 0, z) = u(x, a, z) = 0, \quad u(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{(x,y,0)} = f_2(x, y),$$

mit gegebenem f_1, f_2 (quadratische, ringsum eingespannte Membran mit gegebenem Anfangszustand), und wählt man ein quadratisches Gitter in der x - y -Ebene mit der Maschenweite

$$h = a/N, \text{ so kann man mit } \xi = \xi_\mu = \frac{\mu\pi}{N}, \eta = \eta_\nu = \frac{\nu\pi}{N} \text{ die Fehlerverteilung in der Ebene } z=l$$

in der Form

$$\varepsilon_{i,j,1} = \sum_{\mu,\nu=1}^{N-1} a_{\mu\nu} \sin \frac{i\mu\pi}{N} \sin \frac{j\nu\pi}{N} \quad (29)$$

ansetzen; man erhält als allgemeine Fehlerverteilung

$$\varepsilon_{i,j,k} = \sum_{\mu,\nu=1}^{N-1} \sin \frac{i\mu\pi}{N} \sin \frac{j\nu\pi}{N} (b_{\mu\nu} e^{k\xi_{\mu\nu}} + a_{\mu\nu} e^{-k\xi_{\mu\nu}}) \quad (30),$$

¹¹⁾ Eine Darstellung gibt R. P. Eddy: Stability in the Numerical Solution of Initial Value Problems in Partial Differential Equations, Naval Ordnance Laboratory Memorandum, Bd. 10 (1949), S. 232.

¹²⁾ O. G. Brien, M. Hyman u. S. Kaplan: A Study of the Numerical Solutions of Partial Differential Equations; Journal of Mathematics and Physics 29 (1951), S. 223–251, eine ausführlichere Darstellung der Methode soll am Beispiel der Stabschwingungsgleichung demnächst in einer kleinen Mitteilung in dieser Zeitschrift gegeben werden.

wobei $b_{\mu\nu}$ und $c_{\mu\nu}$ sich in einfacher Weise aus den $a_{\mu\nu}$ berechnen. Stabilität besteht, wenn $\varepsilon_{i,j,k}$ beschränkt bleibt für $k \rightarrow \infty$, d.h. wenn $|e^{\pm \xi_{\mu\nu}}| = 1$ ist für alle $\xi_{\mu\nu}$, die sich mit $\xi = \xi_{\mu\nu}$ aus (28) für $\xi = \xi_\mu$, $\eta = \eta_\nu$ ergeben. Die Diskussion zeigt, daß $|e^{\pm \xi_{\mu\nu}}| = 1$ erfüllt ist für $0 < \varrho \leq \frac{1}{2}$; aus diesem Intervall darf also ϱ gewählt werden.

2. Fehlerabschätzungen

a) Milderung der Lipschitzbedingung. Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ und bei Systemen

$$y'_j = f_j(x, y_1, \dots, y_n) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (31)$$

pflegte man bei Fehlerabschätzungen bisher stets die Lipschitzbedingung in der Form mit absoluten Beträgen zu verwenden. Eltermann¹³⁾ trifft eine mildere Voraussetzung: für festes x und zwei verschiedene Wertesysteme \bar{y}_j und \underline{y}_j genüge die Funktion

$$L(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) = \frac{\sum_{j=1}^n [f_j(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - f_j(x, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)] (\bar{y}_j - \underline{y}_j)}{\sum_{j=1}^n (\bar{y}_j - \underline{y}_j)^2} \quad (32)$$

innerhalb eines betrachteten Bereiches der Bedingung

$$L(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) \leq L \quad (33);$$

insbesondere für negatives L gelangt er zu wesentlich besseren Abschätzungen, als sie bisher vorlagen.

b) Ritzsches Verfahren bei Eigenwertaufgaben. Abschätzungen von N. Kryloff verbessert Bertram¹⁴⁾, zugleich für selbstadjungierte volldefinite Eigenwertaufgaben.

c) Fehlerabschätzung nach v. Mises. Während man sonst bei einer Aufgabe mit der Differentialgleichung (7) und Anfangs- oder Randbedingungen (8) nach dem Fehler α , d.h. der Abweichung $w - u$ einer Näherungslösung w von der exakten Lösung u fragt, hält v. Mises¹⁵⁾ es vom physikalischen Standpunkt aus für vernünftiger, bei gegebener Toleranz δ nach einer Näherung w mit

$$|F(x_j, w, w_j, \dots)| \leq \delta \quad |V_\mu(x_j, w, w_j, \dots)| \leq \delta \quad (34)$$

zu fragen. Diese Fragestellung verlangt zugleich die Aufstellung weiterer Näherungsverfahren¹⁶⁾.

d) Fehlerabschätzung für Ableitungen. Bisher hat man bei einer Aufgabe (7), (8) gewöhnlich nach einer Abschätzung für den Fehlerbetrag $|\alpha| = |w - u|$ der Näherungslösung w gefragt. Bei den Anwendungen interessiert man sich aber häufig mehr für den Fehler bei den Ableitungen, z. B. bei Plattenaufgaben ist der Fehler bei der Durchbiegung meist nicht so wichtig, als der Fehler bei den Spannungen, Momenten usw. In dieser Richtung ist erst wenig gearbeitet worden.

e) Satz vom Randmaximum. Der klassische Satz, daß eine in einem abgeschlossenen beschränkten Bereich reguläre nichtkonstante Potentialfunktion ihr Maximum und ihr Minimum nur auf dem Rande annimmt, ist auf allgemeinere elliptische Differentialgleichungen übertragbar und kann zu einer Fehlerabschätzung für die 1. Randwertaufgabe benutzt werden. Es fehlen noch die entsprechenden Sätze für die 2. Randwertaufgabe¹⁷⁾.

¹³⁾ H. Eltermann: Verbesserung der Fehlerabschätzung bei Differentialgleichungssystemen, Vortrag Freiburg 30. März 1951.

¹⁴⁾ G. Bertram: Zur Fehlerabschätzung für das Ritzsche Verfahren bei Eigenwertaufgaben, Vortrag Freiburg 30. März 1951, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 141.

¹⁵⁾ R. v. Mises: On Network Methods in Conformal Mapping and in Related Problems (erscheint demnächst).

¹⁶⁾ Vortrag von L. Collatz 1951 in Hannover, soll demnächst veröffentlicht werden.

¹⁷⁾ Eine Fehlerabschätzung von J. Grünsch für die 3. Randwertaufgabe soll demnächst veröffentlicht werden.

Über die numerische Auflösung des dritten Randwertproblems bei elliptischen Differentialgleichungen

Von *Eduard Batschelet* in Basel

Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = g(x, y),$$

die in einem Gebiet G der xy -Ebene mit dem Rand C so aufgelöst werden soll, daß auf C eine Randbedingung dritter Art

$$k(s) \frac{\partial u}{\partial n} + h(s) u = f(s)$$

erfüllt ist. Da $k(s)$ und $h(s)$ auf Teilbögen des Randes auch verschwinden können, so ist der Fall von gemischten Randbedingungen eingeschlossen. Über den Rand C , sowie über die Koeffizienten der Differentialgleichung und der Randbedingung werden Annahmen gemacht, welche die Existenz einer eindeutigen Lösung sichern, deren partielle Ableitungen genügend hoher Ordnung stetig sind. Solche Probleme ergeben sich in der Hydrodynamik, der Elastizität, sowie bei der Untersuchung der stationären Wärmeleitung und der Diffusion.

Zur numerischen Bearbeitung solcher Aufgaben empfiehlt sich das Differenzenverfahren, mit dessen Hilfe das kontinuierliche Problem durch ein diskontinuierliches ersetzt wird. Zu diesem Zweck überdeckt man G mit einem (z. B. quadratischen) Punktgitter mit der Gitterseite h . Die Randkurven werden in geeigneter Weise durch einen Gitterrand ersetzt, wobei der Approximation der Normalableitung von u durch einen Differenzenquotienten besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden muß. Schwierigkeiten können auftreten, wenn der Rand Ecken besitzt. In inneren Punkten werden die partiellen Differentialquotienten in bekannter Weise durch entsprechende Differenzenquotienten angenähert. Auf diese Weise erhält man an Stelle der gegebenen Differentialgleichung und der Randbedingung ein einfach gebautes System von linearen, algebraischen Gleichungen. Ihre Anzahl stimmt mit der Punktzahl des approximierenden Gitters überein.

Dieses Gleichungssystem wird am besten mit Hilfe eines Iterationsverfahrens näherungsweise aufgelöst, das sich auf Blockrelaxationen stützt, wie dies vor allem von R. V. Southwell vorgeschlagen wurde. Man kann zeigen, daß bei Randbedingungen dritter Art die Konvergenz des Iterationsverfahrens ebenso gesichert ist wie bei Randbedingungen erster Art.

Von großer Bedeutung ist die Frage, wie gut die Gitterlösung die exakte Lösung der Differentialgleichung approximiert. Durch Modifikation eines Verfahrens von S. Gerschgorin lassen sich für den Fehler obere Schranken finden. Aus ihnen kann unmittelbar ersehen werden, daß bei nach null strebender Gitterseite h die Gitterlösung gegen die exakte Lösung des Problems konvergiert. Selbst bei einer Approximation der Differentialquotienten durch die einfachsten finiten Ausdrücke ist lineare Konvergenz gesichert. Ein besserer Konvergenzgrad wird erreicht, wenn die Approximation der Normalableitung am Rande durch eine Dreipunkteformel der numerischen Differentiation vorgenommen wird.

Die gefundenen Schranken gestatten auch eine Diskussion der Abrundungsfehler, sowie der Fehler, die bei näherungsweise Auflösung des vorliegenden Systems von linearen, algebraischen Gleichungen entstehen.

Numerische Integration von Differentialgleichungen bei Approximation durch trigonometrische Ausdrücke

Von *W. Quade* in Hannover

Ist $y=u(x)$ ein durch den Punkt a, b gehendes Integral der expliziten Differentialgleichung erster Ordnung $y'=f(x, y)$, so besteht bei stetigem $f(x, y)$ die Identität

$$u(x) = b + \int_a^x f[\xi, u(\xi)] d\xi.$$

Bei den verschiedenen nach Adams benannten Verfahren zur numerischen Integration solcher Differentialgleichungen wird der Integrand durch ein Polynom $P(x)$ angenähert, das so bestimmt wird, daß die Differentialgleichung in isolierten Punkten erfüllt ist.

Das Problem der Annäherung des Integranden durch ein Polynom gehört der Approximationstheorie¹⁾ an. Dort werden Näherungen durch Polynome und trigonometrische Ausdrücke untersucht, letztere bei periodischen Funktionen. Da jede Approximation durch Polynome auf eine solche durch trigonometrische Ausdrücke zurückgeführt werden kann, und der letztere Vorgang sich in der Theorie als besonders fruchtbar erwiesen hat, war zu erwarten, daß er auch bei der numerischen Integration von Differentialgleichungen von Nutzen sein werde.

Über die in dem Gebietsstreifen G :

$$a \leq x \leq a + \alpha, \quad -\infty < y < \infty, \quad \alpha > 0$$

erklärte rechte Seite von $y' = f(x, y)$ mögen die üblichen Voraussetzungen gemacht werden, welche die Existenz und Eindeutigkeit des durch den Punkt a, b gehenden Integrales sichern. Um Näherungslösungen mit Hilfe trigonometrischer Ausdrücke zu konstruieren, substituiere man

$$x = a + \alpha \sin^2 \frac{t}{2}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad \dots \dots \dots (1).$$

Dabei geht das Integral $u(x)$ über in $u\left(a + \alpha \sin^2 \frac{t}{2}\right) \equiv v(t)$, wobei $v(t)$ dasjenige Integral von

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \alpha \sin t f\left(a + \alpha \sin^2 \frac{t}{2}, y\right) \quad \dots \dots \dots (2)$$

ist, welches der Anfangsbedingung $v(0) = b$ genügt. Durch Fortsetzung in das Intervall $(-\pi, 0)$ wird $v(t)$ eine gerade Funktion mit der Periode 2π . Die ebenfalls gerade periodische Funktion $f\left[a + \alpha \sin^2 \frac{t}{2}, v(t)\right]$ möge durch den trigonometrischen Interpolationsausdruck $T_n(t)$ von der Ordnung n approximiert werden, der mit f in den äquidistanten Punkten $t_k = \frac{k\pi}{n}$, ($k=0, 1, \dots, n$) übereinstimmt,

$$T_n(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu \cos \nu t + \frac{1}{2} A_n \cos nt;$$

seine Konstanten sind

$$A_\nu = \frac{2}{n} \left(\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} (-1)^\nu f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k \cos \nu t_k \right), \quad \nu = 0, 1, \dots, n.$$

Über die Annäherung einer periodischen Funktion durch diesen Interpolationsausdruck gelten die folgenden Sätze:

1. Ist $f(t)$ stetig und von beschränkter Schwankung, dann strebt $T_n(t)$ mit zunehmendem n gleichmäßig im Periodenintervall gegen $f(t)$.
2. Genügt $f(t)$ einer Lipschitzbedingung von der Ordnung ϱ ($0 < \varrho \leq 1$), dann strebt $T_n(t)$ mit zunehmendem n gleichmäßig im Periodenintervall gegen $f(t)$.

Bei der Approximation durch Polynome, wie sie bei den eingangs erwähnten Verfahren benutzt wird, stehen solche weittragenden Aussagen nicht zur Verfügung, da die Folge der Lagrangeschen Interpolationspolynome bei äquidistanten Ordinaten im allgemeinen divergent ist.

Wird $T_n(t)$ so bestimmt, daß die Differentialgleichung (2) in den äquidistanten Punkten t_k erfüllt ist, so folgen die unbekannten Ordinaten y_1, \dots, y_n der sich auf diese Weise ergebenden Näherungslösung aus dem System

$$y_k - y_0 = \frac{\alpha}{n} (c_{k0} f_0 + c_{k1} f_1 + \dots + c_{kn} f_n), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \dots (3).$$

Hierin bedeuten die c_{kl} Konstanten, die sich bei festem n ein für allemal im voraus berechnen lassen, und es ist $f_k = f(x_k, y_k)$, wobei die x_k sich gemäß (1) aus den t_k ergeben.

Aus (3) können auf Grund der über f gemachten Voraussetzungen die n Unbekannten y_k durch Iteration bestimmt werden, sofern nur α hinreichend klein ist; das System (3) besitzt genau eine Lösung. Mit zunehmendem n geht die Folge der die Lösung $v(t)$ annähernden trigonometrischen Ausdrücke gleichmäßig gegen die Lösung $v(t)$.

An einigen Beispielen wurde gezeigt, daß dieses Verfahren den bisher bekannten in bezug auf Genauigkeit überlegen ist; eine vorbereitende Rechnung ist bei ihm nicht erforderlich, sondern lediglich Iteration. Das Verfahren kann sowohl auf Systeme von expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung als auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung ausgedehnt werden. Eine ausführliche Darstellung befindet sich in Vorbereitung.

¹⁾ Vgl. C. de la Vallée-Poussin: *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris 1919; D. Jackson: *The Theory of Approximation*, New York 1930.

Fehlerabschätzungen bei Differenzenmethoden zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

Von *Germund Dahlquist* in Stockholm

Bei einer Arbeit mit der schwedischen Relaismaschine BARK haben wir Fehlerabschätzungen für eine Reihe von Integrationsmethoden gemacht. Die Ergebnisse und Methoden werden hier der Kürze halber nur an einem besonders einfachen Beispiel angedeutet. Wesentlich ist, daß das Integrationsverfahren eine Differenzengleichung liefert, die von höherer Ordnung ist als die zu integrierende Differentialgleichung.

Wir wollen das Integral der Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

berechnen und gebrauchen dazu die Formel

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_{n-1} + 2h \cdot f(\tilde{y}_n, t).$$

y_n ist die exakte Lösung, \tilde{y}_n ist die Näherungslösung. Man hat

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h \cdot f(y_n, t) + \delta_n,$$

wo der Quadraturfehler δ_n durch die Formel

$$\delta_n = \frac{h^3}{3} \cdot \ddot{y}(\tau) \quad (\tau \text{ ist ein Mittelwert})$$

gegeben ist. Setzen wir

$$y_n - \tilde{y}_n = \varepsilon_n,$$

so erhalten wir nach Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in ε_n ,

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1} + 2h \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_n \cdot \varepsilon_n + \delta_n \quad \dots \quad (1).$$

(Die vernachlässigten Glieder können übrigens auch durch eine Korrektur von δ_n repräsentiert werden.) Die Differenzengleichung (1) kann etwa in folgender Weise angenähert gelöst werden. Erstens hat sie eine partikuläre Lösung $\bar{\varepsilon}_n$, die sich nur wenig von der Lösung $\bar{\varepsilon}(t)$ der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{\varepsilon} + \delta(t); \quad \bar{\varepsilon}(0) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

unterscheidet, wo $\delta(t) \approx \delta_n/2h \approx h^2 \ddot{y}(t)/6$. Die Folge $u_n = \varepsilon_n - \bar{\varepsilon}_n$ genügt der homogenen Gleichung zweiter Ordnung

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2h \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_n u_n \quad \dots \quad (3),$$

die zwei linear unabhängige Lösungen hat. Eine dieser Lösungen unterscheidet sich nur wenig von einer Lösung v der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot v \quad \dots \quad (4),$$

und man findet leicht nach der Substitution $u_n = (-1)^n w_n$, daß die aus (3) entstandene Gleichung für w_n eine Lösung hat, die sich nur wenig von einer Lösung der Gleichung

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial y} w \quad \dots \quad (5)$$

unterscheidet. Wir erhalten somit

$$\varepsilon_n \approx \bar{\varepsilon}(t_n) + A \cdot v(t_n) + B \cdot (-1)^n w(t_n) \quad \dots \quad (6).$$

Die Koeffizienten A und B können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Bezüglich des ersten Gliedes ist es bemerkenswert, daß $\delta(t)$ im wesentlichen von der dritten Ableitung von y bestimmt ist, und daß $\delta(t)$ darum gewissermaßen in Resonanz mit der Lösung der homogenen Gleichung steht. Der Fehler hat auch einen alternierenden Teil, d. h. $(-1)^n w_n$, der von Bedeutung sein kann, wenn der Realteil von $\partial f/\partial y$ negativ ist. Für die Gleichung $dy/dt = -y$ erhält man z. B.

$$y_n - \tilde{y}_n \approx -y_0 \cdot \frac{h^3}{6} \cdot \left[te^{-t} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} he^t \right],$$

was man auch durch explizite Lösung von der Differentialgleichung und der Differenzengleichung finden kann. Für $h = 0,1$ ist das letzte Glied das größte, wenn $t > 2$. Sein Betrag wächst exponentiell.

Die Zerlegung des Fehlers auf der rechten Seite von (6) ist für mehrere andere Integrationsmethoden möglich. In (3) und (4) wird nur der Ausdruck für $\delta(t)$ verändert. Gl. (5) lautet dann

$$\frac{dw}{dt} = c \frac{\partial f}{\partial y} w,$$

wo c eine für das Verfahren charakteristische Konstante ist. Z. B. ist $c = -1/3$ für die Verfahren, wo eine Extrapolation durch mehrfache Iterationen mit Hilfe der Simpsonschen Regel verbessert wird. Wenn man die Simpsonsche Regel in jedem Schritt nur einmal zur Verbesserung benutzt, so ist c von der benutzten Extrapolationsformel abhängig.

Ich beabsichtige, die Herleitungen und Resultate später vollständig zu veröffentlichen.

Ein Summenverfahren für Rand- und Eigenwertaufgaben linearer Differentialgleichungen¹⁾

Von H. Sassenfeld in Darmstadt

Das Summenverfahren dient zur Lösung von Rand- und Eigenwertaufgaben und stellt eine Verbesserung des bekannten Differenzenverfahrens dar. Es macht von Integrationen Gebrauch und legt Quadratur- statt Differenzenformeln zugrunde. In einfachen Sonderfällen führt das Verfahren auf das von L. Collatz¹⁾ eingeführte Mehrstellenverfahren. Die Anwendung des Summenverfahrens ist genau so einfach wie das Differenzenverfahren und führt auch bei komplizierten Differentialgleichungen zu übersichtlichen Ansätzen. Im folgenden wird das Verfahren nur für gewöhnliche Differentialgleichungen hergeleitet, es ist jedoch ohne weiteres auf partielle Differentialgleichungen anwendbar.

Beim Differenzenverfahren werden in dem linearen Differentialausdruck

$$L[y] = \sum_{v=0}^n a_v(x) y^{(v)} + g(x) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

die Differentialquotienten $y^{(v)}$ approximiert durch

$$y_i^{(v)} = \sum_{\mu} \alpha_{i\mu}^{(v)} y_{\mu} + R = {}_i\delta_v y + R \quad \dots \dots \dots (2)$$

mit den Abkürzungen $y_i = y(x_0 + ih)$ und $R = \text{Restglied}$.

Die Ausdrücke (2) werden (ohne Restglied) für alle im Integrationsbereich liegenden Punkte $x_i = x_0 + ih$ in (1) eingeführt und die Lösung des entstehenden Gleichungssystems liefert die gesuchten y_i .

Beim Summenverfahren integriert man zunächst die Differentialgleichung (1) n -mal. Setzt man die $a_v(x)$ v -mal differenzierbar voraus (bei selbstadjungierter Form immer erfüllt), so wird durch wiederholte Anwendung von Teilintegrationen aus (1):

$$M(x) = {}^{(n)}\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x L dx^n = \sum_{v=0}^n {}^{(v)}\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x b_v(x) y dx^v + {}^{(n)}\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x g dx^n + P_{n-1}(x - x_0) = 0 \quad (3).$$

Hier werden jetzt die Integrale durch Quadraturformeln ersetzt, von der Art:

$${}^{(v)}\int_{x_0}^{x_i} \dots \int_{x_0}^x f dx^v = \sum_{\mu} \beta_{i\mu}^{(v)} f_{\mu} + R' = {}_i\mathfrak{S}_v f + R' \quad \dots \dots \dots (4).$$

Das in (3) noch auftretende Polynom $(n-1)$ -ten Grades $P_{n-1}(x - x_0)$, das die bei Randwertaufgaben z. T. unbekannten Anfangswerte enthält, eliminiert man durch Differenzenbildung:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n+i} M(x_i) = \delta_n M = \sum_{v=0}^n \delta_n \mathfrak{S}_v u_v + \delta_n \mathfrak{S}_n g = 0, \quad \text{mit } u_v = b_v y \quad \dots (5),$$

wobei die ${}_i\mathfrak{S}_v$ für die Integrale zur Matrix \mathfrak{S}_v zusammengefaßt sind. Die $\delta_n \mathfrak{S}_v$, die die Komponenten von $\delta_n \mathfrak{S}_v f = \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^{(v)} f_{\mu}$ sind, können ein für allemal unabhängig von der speziellen Form der $a_v(x)$ in (1) ausgerechnet werden.

¹⁾ L. Collatz: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akad. Verlagsges. Leipzig 1949, 466 S.

Die Übersetzung von Randbedingungen mit $y^{(k)}$ am Rande geschieht durch Linearkombination der Gleichung (3) in Form von „links“- oder „rechtsseitigen“ Differenzenformeln ${}_0\delta_k$:

$$\sum_{\nu=0}^k (b_\nu y)_{x=x_0}^{(k-\nu)} = \sum_{\nu=0}^n {}_0\delta_k \mathfrak{S}_\nu u_\nu + {}_0\delta_k \mathfrak{S}_n g \quad \dots \quad (6).$$

Hiermit sind die Ableitungen von y bis zur k -ten Ordnung an der Stelle $x=x_0$ durch Linearkombinationen der $u_\nu(x)$, d. h. wegen $u_\nu = b_\nu y$ durch Linearkombination der y selbst dargestellt.

Es lassen sich zahlreiche Verschärfungen des Summenverfahrens angeben. So kann man Hermitesche Interpolation anwenden. Auch kann die Differentialgleichung $L[y]$ mehr als n -mal integriert werden, womit man ebenfalls zu genaueren Ergebnissen kommt. Abschließend sei noch erwähnt, daß für $\alpha_n = \text{const}$ und α_1 bis α_{n-1} identisch null das besprochene Summenverfahren mit dem Mehrstellenverfahren identisch wird²⁾.

Zur Fehlerabschätzung für das Ritzsche Verfahren bei Eigenwertaufgaben

Von G. Bertram in Hannover

Das Ritzsche Verfahren liefert bei der Anwendung auf Eigenwertprobleme unter geeigneten Voraussetzungen obere Schranken für die Eigenwerte. Es wird eine Methode zur gleichzeitigen Gewinnung unterer Schranken aus dem Ritzschen Verfahren angegeben. Betrachtet werden gewöhnliche, selbstadjungierte, volldefinite Eigenwertaufgaben der Form

$$M[y(x)] = \lambda N[y(x)]$$

mit den Randbedingungen

$$U_\mu[y] = 0 \quad (\mu = 1, \dots, 2m),$$

wobei M und N lineare homogene Differentialoperatoren der Gestalt

$$M[y] = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu [f_\nu(x) y^{(\nu)}]^{(v)}; \quad N[y] = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu [g_\nu(x) y^{(\nu)}]^{(v)} \quad (m > n)$$

sind. Die f_ν und g_ν unterliegen geeigneten Definitheits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen. Die Randbedingungen sollen linear homogen in den Randwerten und Randableitungen bis zur $(2m-1)$ -ten Ordnung, voneinander linear unabhängig und frei von λ sein. Als Ansatzfunktionen werden die Eigenfunktionen eines ähnlich gebauten, definiten Problems

$$P[y] = \lambda y; \quad U_\mu[y] = 0$$

mit denselben Randbedingungen und $P[y] = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu [p_\nu(x) y^{(\nu)}]^{(v)}$ verwendet. Es werden Beziehungen des Ritzschen Verfahrens in der Galerkinschen Fassung zu Integrodifferentialgleichungen aufgezeigt. Weiterhin wird der Spezialfall der Eingliedklasse, d.h.

$$N[y] = (-1)^\nu [g_\nu(x) y^{(\nu)}]^{(v)}$$

diskutiert. Hier gelingt unter geeigneten einschränkenden Voraussetzungen die Zurückführung der Integrodifferentialgleichungen auf Integralgleichungen. Da sich sowohl für die Eigenfunktionen als auch für die Ritzschen Näherungen ähnlich gebaute Integralgleichungen angeben lassen, kann man durch Einführung eines Störungsparameters α eine Gleichungsschar angeben, die speziell für $\alpha=1$ die exakte, für $\alpha=0$ die Näherungslösung ergibt. Die Betrachtung dieser verallgemeinerten Integralgleichung erlaubt im Anschluß an eine Idee von N. Kryloff die Aufstellung einer Alternativgleichung, aus der sich Abschätzungen für den Fehler $\lambda_\nu - \lambda$, der genäherten und der exakten ν -ten Eigenwerte gewinnen lassen. Nebenbei ergeben sich asymptotische Formeln für das Konvergenzverhalten der Eigenwertfehler in Abhängigkeit von der Ansatzgliederzahl, die einfache Konvergenzaussagen gestatten. Für eine Reihe technisch wichtiger Problemklassen lassen sich von Fall zu Fall die Abschätzungsformeln noch wesentlich verbessern. Die aus dem Verfahren gewonnenen Ergebnisse haben sich als praktisch brauchbar erwiesen.

Einzelheiten soll eine in Kürze erscheinende Arbeit enthalten.

²⁾ H. Sassenfeld: Über lineare Gleichungssysteme und ihre Anwendung bei Summenverfahren für Rand- und Eigenwertaufgaben. Dissertation Technische Hochschule Darmstadt 1951, 99 S.

Ein Analogon zu Grammels Methode der graphischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

Von *Walter Gautschi* in Basel

Bedient man sich an Stelle rechtwinkliger Koordinaten der Polarkoordinaten, so gelingt es, Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung in einfacher Weise graphisch-rechnerisch zu integrieren, falls Anfangswerte gegeben sind. Eine Möglichkeit in dieser Richtung hat R. Grammel¹⁾ durch sein Orthopolarverfahren aufgezeigt. Es soll hier ein entsprechendes Verfahren mitgeteilt werden, das vermeidet, mit reziproken Funktionswerten zu arbeiten.

Sei $u(x)$ eine genügend oft differenzierbare Funktion. x und u (für negative u : $x+\pi$ und $|u|$) als Polarkoordinaten aufgetragen, ergeben in einem gewissen Variationsbereich von x eine Kurve C , das sog. Polarbild der Funktion $u(x)$. In entsprechender Weise mögen die Orthopolarbilder C' , C'' , ... aus $u'(x)$, $u''(x)$, ... hervorgehen, wobei jeweils die Nullage der Winkelmessung um $\pi/2$ zu drehen ist (Bild 1). Sind P , P' , P'' , ... entsprechende Punkte der Kurven C , C' , C'' , ..., so steht die Tangentialrichtung des Polarbildes C im Punkte P senkrecht auf $P'P$, diejenige von C' in P' senkrecht auf $P''P'$ usw.

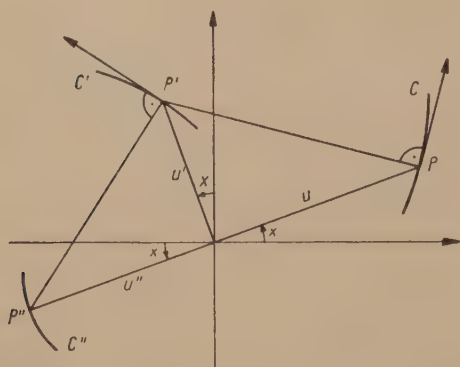


Bild 1

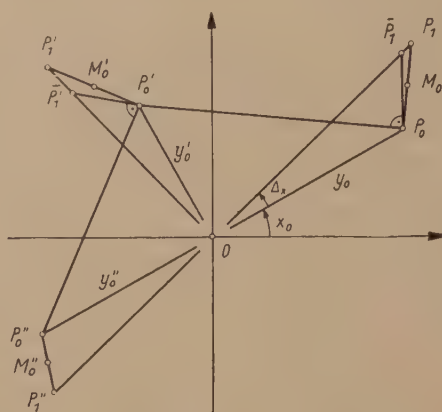


Bild 2

Diese Eigenschaft wird zur Lösung von Differentialgleichungen ausgenützt. Beispielsweise sei die Gleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y^{(v)}(x_0) = y_0^{(v)} \quad (v = 0, 1) \quad (2)$$

vorgelegt. Man wird zunächst die Anfangspunkte $P_0^{(v)}$ vermöge den Anfangswerten (2) markieren (Bild 2). Zur Bestimmung von $P_0^{(v)}$ dient (1). In den Punkten $P_0^{(v)}$ hat man senkrecht zu den Verbindungslinien $P_0^{(v+1)}P_0^{(v)}$ (die nicht notwendig zu zeichnen sind) die Fortschreitungsrichtungen. Diesen wird man folgen etwa bis zum Schnitt mit dem um einen genügend kleinen Winkel Δx gedrehten Polarenkreuz. Sind $P_1^{(v)}$ die Schnittpunkte, so gilt näherungsweise $OP_1^{(v)} = y^{(v)}(x_0 + \Delta x)$. $P_1^{(v)}$ berechnet man, unter Verwendung dieser Näherungswerte, wiederum aus (1). Die nächsten Punkte P_2 gewinnt man aus den P_1 so, wie man die P_1 aus den P_0 konstruiert hat. Nach einigen Schritten kommen genäherte Polar- und Orthopolarbilder der gesuchten Lösungsfunktion $y(x)$ heraus.

Es besteht keine Schwierigkeit, die Verfeinerung der Konstruktion, wie sie Grammel seinem Verfahren beigelegt hat, den neuen Gegebenheiten anzupassen: Nachdem man, ausgehend etwa von den Punkten P_0 die Punkte P_1 konstruiert hat, ermittle man die Mittelpunkte M_0 , M_0' , M_0'' der Strecken P_0P_1 , $P_0'P_1'$, $P_0''P_1''$. Schreitet man jetzt senkrecht zu den Verbindungslinien $M_0^{(v+1)}M_0^{(v)}$ weiter, so gelangt man zu genaueren Punkten $P_1^{(v)}$, von denen man zeigen kann, daß sie die Funktionswerte $y_1^{(v)}$ bis zur zweiten Ordnung genau wiedergeben. $P_1^{(v)}$ kann nötigenfalls aus den $P_1^{(v)}$ genauer berechnet werden. Die zuerst konstruierten Fortschreitungsrichtungen $P_0^{(v)}P_1^{(v)}$ bleiben als Tangenten in den $P_0^{(v)}$ weiterhin nützlich.

¹⁾ R. Grammel: Ing.-Arch. 10 (1939), S. 395.

Sollte eine Nullstelle der Lösungsfunktion oder ihrer Ableitung (radiale Fortschreitungsrichtung!) die Konstruktion aufhalten, so berechne man sich die nächsten Punkte durch Taylor-entwicklung. Die nötigen Ableitungen stehen, teils in der Konstruktion, teils in der Differentialgleichung zur Verfügung. Unter Umständen bringt auch die Einführung einer neuen geeigneten Funktion Vorteile²⁾.

Bemerkungen zu den Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Von U. Wegner in Heidelberg

Ist $A\mathfrak{x}=\mathfrak{z}$ ein lineares Gleichungssystem mit quadratischer Matrix A , deren Elemente a_{ik} ($i, k=1, 2, \dots, n$) heißen mögen, so ist das allgemeinste lineare Iterationsverfahren bestimmt durch den folgenden Ansatz für die $(m+1)$ -te Approximation \mathfrak{x}_{m+1} der Lösung \mathfrak{x} :

$$\hat{\mathfrak{x}}_{m+1} = \hat{\mathfrak{x}}_m - P_m(A\hat{\mathfrak{x}}_m - \mathfrak{z}) \quad \dots \quad (I_1),$$

$$\mathfrak{x}_{m+1} = Q_{m+1}\hat{\mathfrak{x}}_{m+1} + \mathfrak{a}_{m+1} \quad m=0, 1, \dots \quad (I_2),$$

wobei $\hat{\mathfrak{x}}_0$ willkürlich gewählt werden darf, und P_m eine Matrix bezeichnet, die von $\hat{\mathfrak{x}}_m$ und a_{ik} abhängig sein kann. Q_{m+1} und \mathfrak{a}_{m+1} können ebenfalls von den a_{ik} abhängig sein und mit dem Index m variieren. (I₁) können wir schreiben: $\hat{\mathfrak{x}}_{m+1} = C_m\hat{\mathfrak{x}}_m + P_m\mathfrak{z}$ mit $C_m = E - P_mA$. In der verschiedenen Wahl der P_m und Q_m unterscheiden sich die einzelnen Iterationsverfahren. Ist z.B. $A=R+S$ mit existentem R^{-1} , so erhält man in $P_m=R^{-1}$, $Q_{m+1}=E$, $\mathfrak{a}_m=0$ das Hertwigsche Verfahren, was beispielsweise konvergiert (wichtiger Fall für die Baustatik), wenn $A=R+S$ und $R-S$ positiv definit sind. — Ist $P_m=A' \cdot U$ mit $U=(u_{ik})$, $u_{ik}=0$; $i \neq k$,

$u_{ii} = \frac{2M_i}{(M_1 + M_2 + \dots + M_u)s_i}$; $s_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$ und willkürlichem $M_i > 0$, so erhält man bei $Q_{m+1}=E$, $\mathfrak{a}_m=0$, ein stets konvergentes — jedoch nur für lineare Integralgleichungen praktisch verwendbares — Verfahren (Cimmino). — Ist $P_s = P_r$, falls $s=v \cdot g + r$ mit $0 < r \leq g$ ist mit ganzzahligem v und g , so erhält man wieder mit $Q_m=E$ und $\mathfrak{a}_m=0$ ein konvergentes Verfahren, falls $A_{Max}^{C_i} < 1$, $i=1, 2, \dots, g$; $C_i = E - P_i \cdot A$, A^{C_i} = charakteristische Wurzel von $\bar{C}_i C_i$ (= Norm von C_i) ist. Speziell $P_k = t_k \cdot E$ mit komplexer Zahl t_k liefert die Konvergenzbedingung: $|1 - t_k \cdot \lambda^A| < 1$; λ^A = charakteristische Wurzel von A (Bückner). — Setzt man $P_m = \hat{\mathfrak{x}}$ als n -reihige, quadratische Matrix an, so erhält man mit $Q_m=E$, $\mathfrak{a}_m=0$ — also $\hat{\mathfrak{x}}_m = \mathfrak{x}_m$ — ein sehr brauchbares Verfahren zur Approximation von A^{-1} bei der Konvergenzbedingung: $|\lambda^{E-C_iA}| < 1$ (Günther-Schulz). — Setzt man $P_m = D_m = (a_{ik}^{(m)})$, $a_{ik}^{(m)}=0$ für $i \neq k$ und $i=k \neq f_m$ mit $a_{im}^{-1} = d_{im} f_m$, wobei f_m folgendermaßen bestimmt ist: 1. Entweder: $v_{im}(\mathfrak{x}_m) = \max_{i=1, 2, \dots, n} |v_i(\mathfrak{x}_m)|$ mit $v_i(\mathfrak{x}_m) = - \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^{(m)} - z_i \right)$. 2. oder: $v_{im}(\mathfrak{x}_m) = v_{r_m}(\mathfrak{x}_m)$ mit $r_m \equiv m \pmod{n}$ und $0 < r_m \leq n$ (1. und 2. Gauß-Seidelsches Verfahren). Ist A positiv definit, oder $|\lambda^A| < 1$ und $a_{ii} \neq 0$, so tritt Konvergenz ein. Auch hier ist $Q_m=E$ und $\mathfrak{a}_m=0$. — Eine Erweiterung liefert das folgende Verfahren: Ist A nicht-negativ definit, $a_{ii} \neq 0$, so bestimmt die obige Folge \mathfrak{x}_m den Grenzwert: $\lim_{m \rightarrow \infty} A\mathfrak{x}_m = \mathfrak{z}$. Bei hochgradig statisch unbestimmten Systemen (z.B. Tragflügel) findet das Verfahren in der folgenden Form Verwendung: A = positiv definite Matrix \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} = willkürliche Vektoren. Bildung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} A\eta + y^{(0)}A\mathfrak{a} + z^{(0)}A \cdot \mathfrak{b} + t^{(0)}A\mathfrak{c} &= \mathfrak{z}, \\ \mathfrak{a}'A\eta + y^{(0)}\mathfrak{a}'A\mathfrak{a} + z^{(0)}\mathfrak{a}'A\mathfrak{b} + t^{(0)}\mathfrak{a}'A\mathfrak{c} &= \mathfrak{a}'\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{b}'A\eta + y^{(0)}\mathfrak{b}'A\mathfrak{a} + z^{(0)}\mathfrak{b}'A\mathfrak{b} + t^{(0)}\mathfrak{b}'A\mathfrak{c} &= \mathfrak{b}'\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{c}'A\eta + y^{(0)}\mathfrak{c}'A\mathfrak{a} + z^{(0)}\mathfrak{c}'A\mathfrak{b} + t^{(0)}\mathfrak{c}'A\mathfrak{c} &= \mathfrak{c}'\mathfrak{z} \end{aligned}$$

mit den $n+3$ Unbekannten $\eta, y^{(0)}, z^{(0)}, t^{(0)}$ Anwendung des Gauß-Seidelschen Verfahrens liefert: $\lim_{m \rightarrow \infty} (\eta_m + y_m^{(0)}\mathfrak{a} + z_m^{(0)}\mathfrak{b} + t_m^{(0)}\mathfrak{c}) = A^{-1}\mathfrak{z}$. (Die Erweiterungen der Matrix A werden beispielsweise durch die statischen Gleichgewichtsbedingungen gegeben, die zwar in $A\mathfrak{x}=\mathfrak{z}$ stecken, aber explizite nicht erkennbar sind. Der obige Ansatz zwingt zu schnellerer Konvergenz.) —

²⁾ Durch eine freundliche Zusage von Prof. K. Federhofer (Graz) bin ich auf die Arbeiten von R. Neuendorff in der Z. angew. Math. Mech. 2 und 3 aufmerksam geworden. Darin ist die Idee einer solchen Konstruktion bereits ausgesprochen. Als Fortschrittsselemente werden Krümmungskreisbögen und zur Verbesserung der Näherungslösung eine graphische Auswertung der Methode der sukzessiven Approximation angewendet.

Nach Gauß-Seidel wäre z. B. bei existentem A^{-1} das Verfahren $\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m - D_m (A' A \mathbf{x}_m - A' \mathbf{z})$ stets konvergent, praktisch aber unbrauchbar. Setzt man dagegen an:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m+1} = \hat{\mathbf{x}}_m - D_m (A' A \hat{\mathbf{x}}_m - A' \mathbf{z}),$$

$$\mathbf{x}_{m+1} = Q_{m+1} \hat{\mathbf{x}}_{m+1} + \mathbf{a}_{m+1}$$

mit $Q_{m+1} = A$, $\mathbf{a}_{m+1} = A'^{-1} \mathbf{z} - \mathbf{z}$, so erhält man durch diese Transformation ein stets konvergentes Verfahren mit den zwei Variabilitäten, bedingt durch die Formen für D_m , das einfach und schnell arbeitet und zusammengezogen werden kann in die einfache Form:

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m - A D_m (A' \mathbf{x}_m - \mathbf{z}).$$

(Die geometrische Interpretation ist sehr einfach.)

Praktisch rechnet man so:

$$x_p^{(m+1)} = x_p^{(m)} + \alpha_{p,m} v_{p,m}(\mathbf{x}_m), \quad p = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha_{ik} = \frac{a_{ik}}{s_i}; \quad s_i = \sum_{r=1}^n a_{ir}^2.$$

(Man beachte besonders, daß $v_{p,m}(\mathbf{x}_m)$ vom Index p unabhängig ist, was das Verfahren so brauchbar macht) (Kaczmarz). Ist $\Pi_k = (E - A' D_k A) (E - A' D_{k-1} A) \dots (E - A' D_1 A)$ ($k=1, 2, \dots, n$); $\hat{s}_k = k$ te Spalte von A , so kann für jede der Variablen x_k eine independente Darstellung gegeben werden in der Form:

$$x_k = \frac{\hat{s}_k'}{s_k} \Pi_k (E - \Pi_n)^{-1} \mathbf{z}; \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

$(E - \Pi_n)^{-1}$ wird dabei durch den Iterationsprozeß geliefert. Der Formalismus der Gauß-Seidelschen Verfahren und des Kaczmarzschen Verfahrens eignet sich besonders — in der Auffassung von A als linearer Operator — zur Auflösung der Fredholmschen Integralgleichungen 1. und 2. Art. — Durch Transformationen im Gauß-Seidelschen Verfahren der Gestalt:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m+1} = \hat{\mathbf{x}}_m - D_m (G' A P A' G \hat{\mathbf{x}}_m - G' A \mathbf{z}), \quad \mathbf{x}_{m+1} = A' G \hat{\mathbf{x}}_{m+1} - P^{-1} \mathbf{z} + A^{-1} \mathbf{z},$$

oder zusammengezogen in

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m - A' G D_m G' A P A^{-1} (A \mathbf{x}_m - \mathbf{z})$$

mit beliebiger nicht-singulärer Matrix G und positivem definiten P , erhält man viele stets konvergente — und darunter alle bis jetzt bekannten — Verfahren (z. B. $P=E$; G beliebig liefert das Hardy-Cross'sche Verfahren). — Die Konvergenzgüte hängt vom Quotienten $\frac{A_{Min}^C}{A_{Max}^C}$ im allgemeinen ab. Je größer dieser Quotient ist, um so besser ist die Konvergenz. Daher sind Abschätzungen von A_{Min}^C von unten und für A_{Max}^C von oben her notwendig.

Zu den bekannten Verfahren seien noch einige weitere, die für die Praxis von großer Bedeutung sind, angeführt. Es sei $s =$ Spur der Norm von C ; $d =$ Determinante der Norm von C . Dann ist:

$$1. A_{Min}^C \geq s - \sqrt[n]{s^n - n d (n-1)^{n-1}} \geq d \cdot \left(\frac{n-1}{s} \right)^{n-1}.$$

$$2. \text{ Es sei } \mu_{n+1} = s - (n-1) \sqrt[n-1]{\frac{d}{\mu_n}}. \text{ Dann ist: } \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu \geq A_{Max}^C, \text{ wobei } \mu = \xi^{n-1} \text{ ist, und } \xi = \text{größte positive Wurzel von } x^n = s \cdot x - (n-1) \sqrt[n-1]{d} \text{ ist.}$$

$$3. C \text{ sei symmetrisch; } C = \begin{pmatrix} c_{11} & a_1' \\ a_1 & C_1 \end{pmatrix} \text{ dann bilde man:}$$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= c_{11} + a_1' (g_k E - C_1)^{-1} a_1, \\ g_{k+1} &= c_{11} + a_1' (G_k E - C_1)^{-1} a_1, \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots)$$

mit g_1 beginnend, wobei g_1 aus $\lambda_{Max}^C \geq g^{(1)} \geq \lambda_{Max}^C$ gewählt wird. Ist λ_{Max}^C einfach, so gilt:

$$g_1 < g_2 < g_3 < \dots; \quad G_1 > G_2 > G_3 > \dots$$

mit $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p = \lim_{p \rightarrow \infty} G_p = \lambda_{Max}^C$ und

$$\mathbf{x}_k = (g_k E - C_1)^{-1} a_1 \rightarrow \mathbf{x}_1; \quad \mathbf{y}_k = (G_k E - C_1)^{-1} a_1 \rightarrow \mathbf{x}_1,$$

so daß $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor von C zu λ_{Max}^C wird. ($(g_k E - C_1)^{-1}$ wird natürlich approximativ berechnet.)

4. Ist $C = (c_{ik})$; $c_{ik} > 0$; so gilt nach Perron-Frobenius:

$$M_m = \text{Max} \frac{C^{m+1} x_0}{C^m x_0} \rightarrow \lambda_{Max}^C > 0; \quad m_m = \text{Min} \frac{C^{m+1} x_0}{C^m x_0} \rightarrow \lambda_{Max}^C$$

mit beliebigem $x_0 > 0$. Aber es gilt sogar:

$$M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \dots \geq \lambda_{Max}^C \geq \dots \geq \dots \geq m_3 \geq m_2 \geq m_1,$$

was für die praktische Berechnung von größter Wichtigkeit ist.

$$5. \text{ Ist } c'_{ik} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1k} \\ c_{i1} & c_{ik} \end{vmatrix}; \quad x_m = \text{Min}_{i=2,3,\dots,n} \sum_{k=1}^n \frac{|c'_{ik} - x_{m-1} c_{ik}|}{c_{11} - x_{m-1}},$$

so konvergiert $x_m \rightarrow \lambda'_c$, gegen die Wurzel, die in der Nähe von c_{11} liegt, falls $x_0 \neq c_{11}$ in der Nähe von $\lambda^{C'}$ gewählt wird, und wenn diese charakteristische Wurzel von C' einfach ist.

Literatur

- H. Hertwig: Festschrift für H. Müller-Breslau, Leipzig 1912, S. 37–61.
E. Cimmino: Pubblicazioni dell' Instituto per le Applicazioni del Calcolo Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma 1938, XVI.
H. Bückner: Math. Nachr. Akademie-Verlag, 2. Bd., Heft 5 (1949), S. 304ff.
Günther Schulz: Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), S. 54ff.
Ph. Seidel: Abh. der bayerischen Akademie der Wiss. (1874), 3. Abh., S. 81–103 und auch: v. Mises, H. Pollacek — Geiringer: Z. angew. Math. Mech. 9 (1929), S. 65.
L. Collatz: Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 357ff. und Math. Ztschr. 1950.
S. Kaczmarz: Bull. nit. Acad. Polonaise Sciences, A, (1937), S. 355–357.
Zu den Iterationsverfahren allgemein:
H. Wittmeyer: Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 301.
U. Wegner: Numerische Verfahren zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen. Berlin: Springer 1952.
Abschnitt 8 und 9. Im 5. bis 7. Abschnitt sind u. a. auch die obigen Abschätzungen gegeben.

Über das Iterationsverfahren

Von Johannes Weissinger in Hamburg

Die Anwendungen des Iterationsverfahrens auf die verschiedensten linearen und nicht-linearen Probleme lassen sich als Spezialfälle eines abstrakten Satzes auffassen, der zunächst formuliert werden soll.

Gegeben seien ein vollständiger, metrischer Raum¹⁾ Ω mit Elementen ξ, η, \dots , deren Abstand $|\xi, \eta|$ also die Dreiecksungleichung $|\xi, \eta| \leq |\xi, \zeta| + |\zeta, \eta|$ befriedigen soll, und eine Halbgruppe²⁾ H von Abbildungen T des Raumes Ω in sich. Wir sagen, in H sei ein Betrag erklärt, wenn jedem T eine reelle Zahl $|T| \geq 0$ zugeordnet ist, so daß gilt

$$|T\xi, T\eta| \leq |T| \cdot |\xi, \eta| \quad \text{für beliebige } \xi, \eta \dots \dots \dots (1),$$

Gewöhnlich ist H die von einem festen T erzeugte Halbgruppe $H = \{T^n\}$. Dann ist durch $|T^n| = |T|^n$ ein Betrag in H definiert, falls (1) für die Erzeugende T gilt.

Hauptsatz: Die Folge $\xi_n = T^n \xi_0 = T \xi_{n-1}$ konvergiert bei beliebigem ξ_0 sicher dann und zwar gegen die eindeutig bestimmte Lösung ξ der Gleichung $\xi = T\xi$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |T^n|$ konvergiert, also sicher wenn $|T| < 1$ ist. Im letzteren Fall gilt die Fehlerabschätzung

$$|\xi_n, \xi| \leq \frac{|T|}{1 - |T|} |\xi_n, \xi_{n-1}|.$$

Der sehr einfache Beweis soll hier unterdrückt werden, um statt dessen einige (lineare, reelle) Beispiele zu betrachten.

Satz 1³⁾: Zerlegt man die symmetrische, positiv definite Matrix \mathfrak{A} :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} - \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}'_1 + \mathfrak{F} \quad (\mathfrak{B}' = \text{Transponierte von } \mathfrak{B}),$$

¹⁾ Für die meisten Anwendungen genügt es, Ω als additive Gruppe vorauszusetzen. Die Verallgemeinerung zu einem metrischen Raum verdanke ich Herrn W. Maak.

²⁾ D. h. mit T_1, T_2 soll auch $T_1 T_2$ in H liegen.

³⁾ Dieser Satz enthält als Spezialfall ein bekanntes Kriterium für das Einzelschrittverfahren [von Mises und Pollacek-Geiringer: Z. angew. Math. Mech. 9 (1929)]. Hinsichtlich weiterer Literaturhinweise muß auf eine demnächst erscheinende, ausführlichere Darstellung verwiesen werden.

so daß $(\mathfrak{D} - \mathfrak{B}_1)^{-1}$ existiert und $\mathfrak{D} + \mathfrak{F}$ symmetrisch und positiv definit ist, so konvergiert die Vektorfolge

$$\mathfrak{x}_{n+1} = \mathfrak{C}\mathfrak{x}_n + \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{B}_1)^{-1}\mathfrak{B}_2$$

bei beliebigem \mathfrak{x}_0 gegen die Lösung von $\mathfrak{x} = \mathfrak{C}\mathfrak{x} + \mathfrak{t}$ (und damit von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{r} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{B}_1)\mathfrak{t}$).

Beweis: Ω sei der Raum der Vektoren \mathfrak{x} mit der durch \mathfrak{A} bestimmten Metrik

$$|\mathfrak{x}| = \sqrt{\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x}}, \quad |\mathfrak{x}, \mathfrak{y}| = |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|.$$

T ist die Transformation $\mathfrak{C}\mathfrak{x} + \mathfrak{t}$, $H = \{T^n\}$. Dann ist in H durch $|T| = |\mathfrak{C}|$, $|T^n| = |T|^n$ ein Betrag definiert, wenn $|\mathfrak{C}\mathfrak{x}| \leq |\mathfrak{C}||\mathfrak{x}|$ für alle \mathfrak{x} gilt, und der Satz ist bewiesen, wenn $|\mathfrak{C}| < 1$ ist. — Nun folgt aus der leicht verifizierbaren Identität

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')(\mathfrak{D} + \mathfrak{F})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}), \quad \mathfrak{C} = \text{Einheitsmatrix}$$

durch Multiplikation mit \mathfrak{x}' bzw. \mathfrak{x}

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{x}|^2 = |\mathfrak{x}|^2 - \mathfrak{x}'\mathfrak{B}\mathfrak{x}, \quad \text{also} \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{x}| \leq |\mathfrak{C}||\mathfrak{x}| \quad \text{mit} \quad |\mathfrak{C}| = \sqrt{1 - p} < 1,$$

da \mathfrak{B} positiv definit und daher $\mathfrak{x}'\mathfrak{B}\mathfrak{x} > p|\mathfrak{x}|^2$, $1 > p > 0$ ist.

Der Satz läßt sich mühelos auf semidefinite Matrizen verallgemeinern und auf Fredholm'sche Integralgleichungen zweiter Art übertragen, so daß er als Grundlage einer allgemeinen Lösungstheorie für solche Integralgleichungen dienen kann.

Ist jeder m -reihigen quadratischen Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ ein „Betrag“ $|\mathfrak{A}| \geq 0$ zugeordnet mit folgenden Eigenschaften

- a) $|\mathfrak{A}| = 0$ ist äquivalent mit $\mathfrak{A} = 0$,
- b) aus $|\mathfrak{A}_n| \rightarrow 0$ folgt $\mathfrak{A}_n \rightarrow 0$,
- c) $|\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2| \leq |\mathfrak{A}_1| + |\mathfrak{A}_2|$
- d) $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2| \leq |\mathfrak{A}_1||\mathfrak{A}_2|$ } für beliebige $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$,

so gilt

Satz 2: Ist $|\mathfrak{B}| < 1$, so konvergiert die Matrizenfolge $\mathfrak{x}_{n+1} = \mathfrak{B}\mathfrak{x}_n + \mathfrak{C}$ bei beliebigem \mathfrak{x}_0 gegen die Lösung \mathfrak{x} der Matrixgleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{B}\mathfrak{x} + \mathfrak{C}$, und es ist

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_n| \leq \frac{|\mathfrak{B}|}{1 - |\mathfrak{B}|} |\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_{n-1}|.$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Hauptsatz, wenn man für Ω den Matrizenring nimmt und H mit Ω identifiziert. Man bestätigt nun leicht, daß z.B. durch $|\mathfrak{A}| = \text{Max} \sum_k |a_{ik}|$

oder $|\mathfrak{A}| = \text{Max}_k \sum_i |a_{ik}|$ oder $|\mathfrak{A}| = \sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2}$ ein „Betrag“ im Matrizenring definiert ist. Jede

dieser Betragsdefinitionen liefert, in Satz 2 eingesetzt, ein bekanntes Konvergenzkriterium nebst Fehlerabschätzung für das Gesamtschrittverfahren (wenn \mathfrak{C} , \mathfrak{x}_0 und damit alle \mathfrak{x}_n als Vektoren deutbare „Spaltenmatrizen“ sind). Natürlich kann man Satz 2 auch ohne Berufung auf den abstrakten Hauptsatz unmittelbar aus den Eigenschaften a) bis d) herleiten, die ja besagen, daß man mit Matrizen und ihren Beträgen im wesentlichen genau so rechnen darf wie mit Zahlen. Man hat damit eine sehr einfache und elementare Methode zur einheitlichen Formulierung und Herleitung der üblichen Kriterien.

Lagrange-Hermite'sche Interpolation im Komplexen

Von H. Unger in Darmstadt

Die Interpolation im Komplexen ist eine immer wichtiger werdende Teilaufgabe der Vertafelung spezieller Funktionen für komplexes Argument. Solche Tafeln erfordern doppelten Eingang und können im allgemeinen nicht so engmaschig tabelliert werden, daß eine Interpolation mit einem Polynom niederen Grades durchführbar ist. Um mit möglichst wenig Stützpunkten auszukommen, muß eine hochgradige Interpolation herangezogen werden. Für diese Zwecke erscheint die von Hermite gebrachte Erweiterung der gewöhnlichen Lagrangeschen Interpolationsformel unter Heranziehung der Ableitungen,

$$P(z) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{p=0}^q L_{\mu,p}(z) g_{\mu}^{(p)},$$

besonders geeignet. Legt man die Stützstellen in die Eckpunkte eines regelmäßigen Polygons, dann kann man die Koeffizienten $L_{\mu,p}(z)$ auf Grund der Beziehung

$$L_{\mu,p}(z) = e^{i \frac{2\pi}{n} p(\mu-1)} L_{1,p}[z^{(n)}]$$

auf die Koeffizienten mit dem Index 1 an den abgeänderten Argumentstellen

$$z^{(\mu)} = z e^{\frac{2\pi}{n}(1-\mu)}$$

zurückführen.

Für die praktische Durchführung bedeutet dies im Falle eines Quadrates, dem man im allgemeinen den Vorzug geben wird, daß man für eine Interpolation mit einem Polynom vom beispielsweise 11. Grade an Stelle der 12 Koeffizienten nur drei zu verzeichnen braucht, nämlich $L_{1,0}$, $L_{1,1}$ und $L_{1,2}$. Dabei müssen in den Eckpunkten des Quadrates die Funktionswerte, die ersten und zweiten Ableitungen der zu interpolierenden Funktion bekannt sein. Bei vielen speziellen Funktionen können die Ableitungen einfach berechnet werden (z. B. durch Rekursionsformeln, Differentialgleichungen).

Eine ausführliche Darstellung erscheint in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Zürich.

Eine Bemerkung zum Ausgleichen fehlerhafter Meßreihen

Von K. Stange in Karlsruhe

Sind die durch Messung bestimmten Koordinaten (x, y, \dots) einer Punktreihe, welche der Gleichung $F(x, y, \dots; a, b, \dots) = 0$ genügen soll, mit Meßfehlern behaftet, so bestimmt man die Parameter a, b, \dots nach der „Methode der kleinsten Quadrate“ so, daß gewisse „verbesserte Meßwerte“ \bar{x}, \bar{y}, \dots der vorgegebenen Gleichung $F=0$ genügen. Dabei schiebt man die Meßfehler oft mit gewisser Willkür einseitig einer der beiden Veränderlichen zu. Da das Ergebnis des Ausgleichens jedoch von den getroffenen Annahmen über die Verteilung der Meßfehler abhängt, so fälscht man mit der eben genannten vereinfachenden Annahme unter Umständen das Ergebnis von vornherein in nicht übersehbarer Weise. Ein sinnvolles Ausgleichen ist nur möglich, wenn man die dem Meßverfahren zugeordnete Streumatrix kennt.

Im allgemeinen Falle werden die Parameter a, b, \dots unter Verzicht auf einschränkende Voraussetzungen so bestimmt, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte an den Meßpunkten P in bezug auf die ausgeglichenen Punkte \bar{P} möglichst groß wird. Der Weg führt auf ein System nichtlinearer „Normalgleichungen“. Die Lösung dieses verwickelten Systems läßt sich jedoch iterativ schrittweise gewinnen, wobei man bei jedem Einzelschritt nur ein System linearer Gleichungen zu lösen hat. Die unter vereinfachenden Annahmen geltenden bekannten Lösungen der Ausgleichsaufgabe lassen sich als Sonderfälle in den allgemeineren Rahmen einordnen.

Fehlerabschätzungen zu den Verfahren von Graeffe und Brodetsky-Smeal

Von E. Weinl in Jena

Durch einen unmittelbar an das Graeffesche Verfahren anschließenden rekursiven Rechenprozeß lassen sich nach dem Vorgang von Brodetsky und Smeal¹⁾ die komplexen Nullstellen eines reellen oder komplexen Polynoms vollständig bestimmen. Für den Fehler, der sich beim Abbrechen des Verfahrens nach dem n -ten Schritt einstellt, lassen sich einfache Abschätzungen angeben, die unmittelbar aus den im Zuge der Rechnung entstehenden Zahlenwerten gebildet werden können.

Ein ausführlicher Bericht folgt in einem späteren Heft dieser Zeitschrift.

Bestimmung der Sonnenfleckperioden mit Hilfe des Periodogramms

Von H. Wundt in Freiburg i. Br.

Eine empirische, in einem Intervall der Länge T tabellarisch gegebene Funktion $f(t)$, deren Zusammensetzung aus periodischen Funktionen unbekannter Periodenlänge uns interessiert, können wir nach Fourier analysieren. Die Gesamtamplituden $h(\lambda) = \sqrt{a^2(\lambda) + b^2(\lambda)}$ bilden, über der Wellenlänge λ als unabhängiger Veränderlicher aufgetragen, ein diskretes Linienspektrum. Führen wir statt λ die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ ein, so werden die „Fourierabszissen“

¹⁾ Brodetsky und Smeal: Proc. Cambridge philos. Soc. 22 (1924).

$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ äquidistant. Die zugehörigen „Fourierordinaten“ sinnvoll zu interpolieren ist Aufgabe der Periodogrammrechnung.

Eine spezielle Methode, eine solche interpolierende Funktion $\Pi(\omega)$ zu finden, ist die folgende (vorgeschlagen von Ostrowski):

$f(t)$ wird mit der Einzelschwingung $h \cdot \cos(\omega t - \varphi)$ verglichen und das mittlere Abweichungsquadrat im Intervall T durch Variation der drei verfügbaren Parameter h , ω und φ minimal gemacht:

$$\int_0^T [f(t) - h \cdot \cos(\omega t - \varphi)]^2 dt = \text{Min.} \quad (1).$$

Differenziert man zunächst nach h , so findet man, daß der Ausdruck

$$\frac{\left[\int_0^T f(t) \cdot \cos(\omega t - \varphi) dt \right]^2}{\int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi) dt} \quad (2)$$

maximal gemacht werden muß. Sein Nenner N ist vom speziellen Problem unabhängig. Es bedeutet daher eine Rechenvereinfachung, wenn wir ihn als konstant, also von ω und von φ unabhängig, betrachten könnten. Dies ist der Fall für $\omega T \gg 1$, nämlich

$$\lim_{\omega T \rightarrow \infty} N = \frac{T}{2} \quad (3).$$

Es bedeutet, daß wir uns auf Wellenlängen beschränken, die viel kürzer als T sind. Unter dieser Voraussetzung bleibt schließlich zur Erfüllung von (1) eine Funktion von ω allein, die zum Maximum zu machen ist:

$$\Pi(\omega) = \frac{T}{2} \sqrt{\left(\int_0^T f(t) \cos \omega t dt \right)^2 + \left(\int_0^T f(t) \sin \omega t dt \right)^2} \quad (4).$$

Diese Funktion ist das von Schuster 1905 definierte Periodogramm und löst offenbar die eingangs gestellte Interpolationsaufgabe. Ihre einzelnen Maxima geben diejenigen Schwingungen an, die (jede für sich) $f(t)$ optimal annähern. Man bestimmt weiterhin die Maxima durch Aufsuchen der Nullstellen der Ableitung mittels geeigneter Näherungsmethoden für jedes spezielle Problem. Die Rechnungen sind sehr umfangreich.

Verschiedene Mängel der Methode treten bei unserer Herleitung sofort in Erscheinung:

1. Voraussetzung $\omega T \gg 1$.

Läßt man diese fallen, so findet man nach einiger Rechnung das sog. „vollständige“ Periodogramm:

$$h(\omega) = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{(Cr - Sq)^2 + (\bar{S}p - Cq)^2}{(pr - q^2)^2}} \quad (5),$$

wobei C und S die schon oben gebrauchten verallgemeinerten Fourierkoeffizienten

$$C(\omega) = \int_0^T f(t) \cos \omega t dt; \quad S(\omega) = \int_0^T f(t) \sin \omega t dt \quad (6)$$

sind, und p , q , r die folgenden Korrekturgrößen bedeuten:

$$p = \frac{T}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\omega T}{2\omega T} \right); \quad q = \frac{T \sin^2 \omega T}{2\omega T}; \quad r = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\omega T}{2\omega T} \right) \quad (7).$$

2. Gegenseitige Störung der Maxima.

$\Pi(\omega)$ bzw. $h(\omega)$ zeigen u. U. eine ganze Anzahl m von Perioden an. Jede einzelne Schwingung befriedigt (1), doch ist dies für ihre Summe nicht mehr der Fall. Im allein durchgerechneten Fall $m=2$ findet man, daß man nunmehr folgende Forderungen stellen muß, um beim Schuster-Periodogramm bleiben zu können:

$$\omega_1 T \gg 1; \quad \omega_2 T \gg 1; \quad |\omega_1 - \omega_2| T \gg 1 \quad (8).$$

Letzteres besagt, daß die Perioden nicht zu benachbart sein dürfen, da sonst die Länge der Differenzschwingung von der Größenordnung T ist.

3. Periodogramm prinzipiell nicht invariant gegen Niveauverschiebung von $f(t)$.

Ändert man alle Ordinaten der Ausgangsfunktion $f(t)$ um einen gewissen konstanten Betrag c , so ändert das nichts an den diskreten Fourier-Amplituden des Spektrums wegen der Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen in jedem Intervall, das ihre Periode ganzzahlig enthält (natürlich mit Ausnahme des uninteressanten Absolutgliedes). Alle nicht-harmonischen Zwischenordinaten ($\lambda = \frac{T}{n}$; $n = 1, 2, \dots$) dagegen erfahren Veränderungen, wie man aus der Gegenüberstellung

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &= \int_0^T f(t) \sin \omega t dt \\ \bar{S}(\omega) &= \int_0^T [f(t) + c] \sin \omega t dt = S(\omega) + \frac{c}{\omega} (1 - \cos \omega T) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

ersieht, und entsprechend für $C(\omega)$ und $\bar{C}(\omega)$. Der Zusatzterm kann durch Wahl von c beliebig groß gemacht werden. Aber selbst bei der naheliegenden Wahl $c = -\bar{f}(t)$ (Reduktion auf Mittel-niveau 0) kann er für kleine ω durchaus die Größenordnung von $S(\omega)$ erreichen.

Die dargelegten Verhältnisse wurden am Beispiel der Reihe der Sonnenfleckenrelativzahlen illustriert. Das Ausgangsmaterial sind die 2400 (ungeglätteten) Monatsmittel von 1749 bis 1948 einschließlich. Der gesamte Verlauf der Periodogramme zwischen den Periodenlängen $\lambda = 5$ Jahre und $\lambda = 100$ Jahre („Durchmusterung“) kann hier nicht wiedergegeben werden, so daß auch die Unterschiede zwischen Schusterschem, „vollständigem“ und „auf Nullniveau reduziertem“ Periodogramm nicht zum Ausdruck kommen. Die Abweichungen sind nur für Wellen länger als etwa 30 Jahre beträchtlich. Stattdessen gebe ich hier die aus $\pi(\omega)$ mittels Näherungsmethoden bestimmten Maxima, d. h. alle so erkannten Sonnenfleckenperioden an, die, von *mathematischen* Einwänden abgesehen, die z. Z. genauesten sein dürften. Unter a (Jahr) ist hier ein Zeitraum verstanden, der entsteht, wenn alle Monatsmittel ohne Rücksicht auf die Monatslänge mit gleichem Gewicht in die Rechnung eingehen („mittleres Jahr“).

Die Periodizitäten der Reihe der Sonnenfleckenrelativzahlen

Perioden a	Ampli- tuden π_{1948}	Phasen $\text{tg } \varphi$	Zeitpunkt des letzten Maximums vor 30. 12. 1948	Perioden a	Ampli- tuden π_{1948}	Phasen $\text{tg } \varphi$	Zeitpunkt des letzten Maximums vor 30. 12. 1948
5,498	7,3	1,012	23. 10. 1947	13,204	9,0	1,044	19. 1. 1936
5,773	6,0	0,863	27. 1. 1946	14,347	8,7	5,728	7. 8. 1948
6,997	5,4	2,544	3. 10. 1947	19,565	6,1	0,846	15. 4. 1947
7,663	7,2	5,579	20. 5. 1947	26,643	9,3	2,327	22. 5. 1945
8,413	12,5	3,349	24. 12. 1946	31,670	5,3	0,690	4. 7. 1942
8,847	12,6	2,181	17. 9. 1946	37,747	8,7	0,980	16. 8. 1943
9,311	16,8	1,694	16. 1. 1947	45,414	12,1	3,411	1. 11. 1941
9,875	21,8	0,851	4. 11. 1947	82,527	27,6	1,764	29. 3. 1937
11,211	27,6	5,920	19. 12. 1938				

Referate der Vorträge:

H. Bilharz, Freiburg i. Br.: Über die Gaußsche Methode zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale,

H. Eltermann, Braunschweig: Verbesserung der Fehlerabschätzung bei Differentialgleichungssystemen,

S. T. A. Ödman, Djursholm: Ein Extremalprinzip und dessen Anwendung als Entwicklungstheorem für die Lösung linearer Differentialgleichungen,

sind nicht eingegangen.

Ein ausführlicher Bericht über den Vortrag W. Richter, Frankenthal: Graphische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit nomographischen Hilfsmitteln, wird in einem späteren Heft der Zeitschrift erscheinen.

B. Mathematik

Geometrisches über Potenzbetragflächen

Von Egon Ullrich in Gießen

Die allgemeinen Potenzen $z^{\alpha+i\beta}$ erwiesen sich, innerhalb einer sehr weiten Klasse analytischer Funktionen $w(z)$, als ausgezeichnet durch eine Krümmungseigenschaft ihrer Betragflächen im Großen: Sie sind nämlich die einzigen Funktionen der Klasse, deren Betragfläche im Gesamtverlauf *einsinnige* Gaußkrümmung K zeigt, d.h. daß überall im Existenzgebiet $K \geq 0$ oder überall $K \leq 0$ gelten soll; das tritt hier ein, je nachdem $\alpha \geq 1$ gilt, während $K \equiv 0$ überhaupt nur für die Potenzen $z^{1+i\beta}$ und die Exponentialfunktion vorkommen kann. Eine ausführliche Darstellung erscheint im 54. Bande der Math. Zeitschrift; dort finden sich auch Figuren über die Betragflächen zu $z^{\alpha+i\beta}$. Jede solche Potenzbetragfläche (kurz Pbfl. α, β) ist in Zylinderkoordinaten r, φ, h dargestellt durch

$$h = r^\alpha e^{-\beta\varphi} \dots \dots \dots (1).$$

Sie schneidet die Koordinatenflächen $h = \text{const}$ in *logarithmischen Spiralen*, $\varphi = \text{const}$ in *Parabeln* $h = cr^\alpha$ (*Parabel* bezieht sich hier ausnahmsweise auf *alle* festen $\alpha \geq 0$), $r = \text{const}$ endlich längs Raumkurven, die entstehen, wenn man eine Exponentialkurve auf diesen Zylinder aufrollt; wir haben sie *Exponentialwendeln* genannt (kurz: *Wendel*). Nur wenn β verschwindet, sind die Pbfl. schlichte Rotationsflächen, die Wendeln

arten in Kreise aus; für jedes $\beta \neq 0$ aber haben wir unendlich vielblättrige Flächen, die man erzeugen kann, indem man die Parabel cr^α in jedem Fächerschnitt mit $c = e^{-\beta\varphi}$ so überhöht, daß sie für laufendes φ längs der Wendel über $r = 1$, $h = e^{-\beta\varphi}$ geführt wird. Für $\alpha = 1$ entsteht der *Kegel* dieser Wendel, mit der Spitze in $z = 0$, der aber auch als Kegel einer log. Spirale verstanden werden kann; für $\alpha = 0$ ergibt sich das gerade *Konoid* der Wendel $h = e^{-\beta\varphi}$.

Ich habe die Pbfl. geometrisch näher untersucht. Als Ausschnitt aus dieser Arbeit berichte ich hier über eine Klasse von Raumkurven, die mit diesen Flächen eng verbunden ist, und bisher nicht bemerkt worden zu sein scheint. Man stößt darauf schon, wenn man nach den Kurven festen Arguments fragt; es ist $\arg z^{\alpha+i\beta} = \gamma$ längs der Durchdringung der Pbfl. mit dem Zylinder L der log. Spirale

$$r = \exp \left(-\frac{\alpha}{\beta} \varphi + \frac{\gamma}{\beta} - 2n\pi \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Auf denselben Kurventypus kommt man aber auch, wenn man zwei beliebige Pbfl. (α_1, β_1) und (α_2, β_2) zum Schnitt bringt. Die Durchdringung geschieht im allgemeinen Falle längs einer

Folge von Kurven S_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), die aus einer, etwa dem Hauptschnitt S_0 durch $(r, \varphi, h) = (1, 0, 1)$ in einfacher Art zu gewinnen sind: Man gehe etwa von den Durchstoßpunkten des Fächerschnittes $\varphi = 0$ an der Pbfl. α_1, β_1 mit allen Blättern $\varphi = 2n\pi$ von α_2, β_2 aus. Jede dieser Kurven kann auch erzeugt werden, wenn man den Zylinder L einer log. Spirale mit dem Konoid M einer Exponentialwendel schneidet. Für S_0 gibt das:

$$\begin{aligned} L: r &= e^{\lambda\varphi} \\ M: h &= e^{\mu\varphi} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \mu = \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \dots \dots \dots (2).$$

Daraus ergeben sich *alle* Schnittkurven S_n der beiden Pbfl. in der Form $r_n = r_1^n e^{\lambda\varphi}$, $h_n = r_1^{n\lambda} e^{\mu\varphi}$ mit $r_1 = \exp \{2\pi\beta_2: (\alpha_2 - \alpha_1)\}$. Zwei Pbfl. mit $\beta_2 = \beta_1$ schneiden sich nur in *Wendeln* $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle 0, -\beta \rangle$.

Da unsere Kurven mit den log. Spiralen als deren Überlagerungen so eng verbunden sind, sei der Name *Spirella* angeregt.

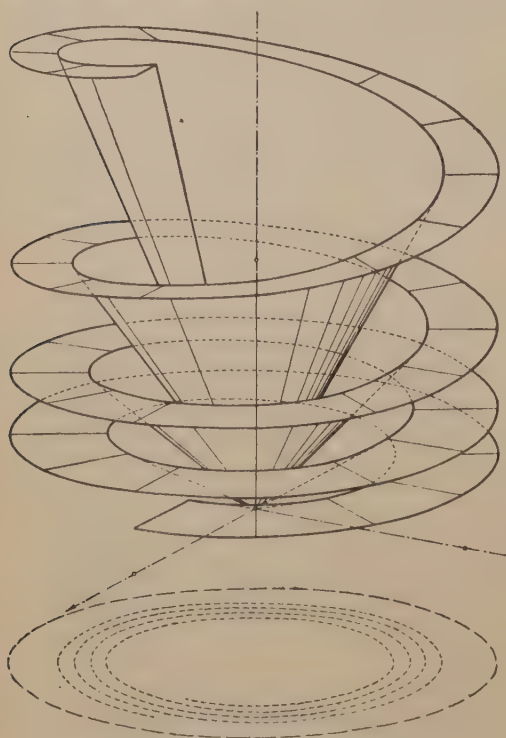


Bild 1. Durchdringung von Potenzbetragflächen.
Spirella und Exponentialwendel

Durch jede Spirella (2) mit den Hochzahlkoeffizienten $\langle \lambda, \mu \rangle$ geht eine einparametrische Schar von Pbfl. Wir wählen den Realteil des Potenzexponenten, α , als Parameter und finden dazu die Schar der Potenzen $z^{\lambda + i(\lambda - \mu)}$, bzw. ihre Betragflächen. Darunter gibt es für $\lambda \neq 0$ genau eine schlichte Fläche für $\alpha = \mu : \lambda$. Jede Spirella kann also auch erzeugt werden, indem man den Spiralzylinder $L : r = e^{\lambda \varphi}$ mit der Rotations-, paraboloid-“fläche $P : h = r^{\mu/\lambda}$ schneidet. Diese Erzeugung bietet den Vorteil guter Übersicht; nur die Exponentialwendeln $\langle 0, \mu \rangle$ entziehen sich natürlich der Einlagerung in eine schlichte Fläche über der z -Ebene.

Für $\mu = \lambda$ wird P in einen Kreiskegel ausarten; die Spirella $\langle \lambda, \lambda \rangle$ ist dessen Schnittkurve mit dem Zylinder L der log. Spirale, also die aus der elementaren Differentialgeometrie durch ihre natürlichen Gleichungen bekannte *Konische Schraubenlinie*: Krümmung und Windung sind dann der Bogenlänge proportional. Für $\mu \neq \lambda$ aber haben wir in den Spirellen echte Verallgemeinerungen der konischen Schraubenlinien vor uns. Sie liegen *nicht* auf einem Kreiskegel. Wohl aber kann jede von ihnen auf dem *Kegel einer Exponentialwendel* untergebracht werden; wir müssen dann aus der Schar der Pbfl. durch die Spirella $\alpha = 1$ herausgreifen, also $\beta = \lambda - \mu$ nehmen. Jede Spirella gehört so *drei* Regelflächen an: Außer dem in (2) genannten Spiralzylinder L und dem Wendelkonoid M noch dem Wendelkegel $K : h = r e^{(\mu - \varphi)\lambda}$. Das bietet Vorteile im Rahmen der Darstellenden Geometrie.

Unser Bild zeigt die Durchdringung von K und M und deutet im Grundriß (zur Übersichtlichkeit tiefer gezeichnet) den Kreis und die logarithmische Spirale an, welche aus dem Konoid die Exponentialwendel und die K, L, M gemeinsame Spirella herausheben. Der Flächenstreifen auf dem Konoid, zwischen Spirella und Wendel ist hervorgehoben. Um mehrere Umläufe in der Zeichnung unterzubringen wurden die Koeffizienten λ, μ passend, klein gewählt.

Dem Charakter dieses Vortragsauszuges entsprechend sind entbehrliche Konstanten beiseite gelassen, Ausartungen nur angedeutet worden. Eine ausführlichere Darstellung ist für die Monatshefte der Mathematik vorgesehen.

Der Zusammenhang allgemeiner Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungen mit der Integralgleichungstheorie

Von *N. Joachim Lehmann* in Dresden

Viele technische Eigenwertaufgaben führen zu Differentialgleichungen

$$\sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu (f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)} = \lambda \sum_{\nu=0}^{n \leq m} (-1)^\nu (g_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)} \quad \text{kurz} \quad M(y) = \lambda N(y) \quad \dots (1)$$

mit in y und λ linearen Randbedingungen: $U_\mu(y) = \lambda S_\mu(y)$, $\mu = 1, \dots, 2m$.

Spezielle Aufgaben hiervon — z. B. wenn $N(y)$ eingliedrig ist — lassen sich mit einer Greenschen Funktion der Theorie symmetrischer Integralgleichungen einordnen. Im allgemeinen Fall schien aber dieser einfache Weg versperrt. Es soll gezeigt werden, wie hier die Einführung einer geeigneten Maßform weitergeführt; explizit werden dabei die Integral- durch Integrodifferentialgleichungen ersetzt. Das Vorgehen sei unter den Kamkeschen Selbstadjungiertheitsforderungen zu (1) skizziert. Dabei ist im Grundgebiet $a \dots b$ $S_\mu \equiv 0$, $f_\mu \neq 0$. Zum Operator M soll die (symmetrische) Greensche Funktion $G(x, s)$ existieren. (1) ist damit äquivalent zu

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, s) N(y(s)) ds. \quad (\text{Integrationen immer über } a \dots b \text{ verstanden.}) \quad \dots (2).$$

Für Lösungen gewinnt man durch partielle Integration mit $R_1 = a$, $R_2 = b$

$$y(x) = \lambda \left\{ \sum_{\nu=0}^n \frac{\partial^\nu}{\partial s^\nu} G(x, s) y^{(\nu)}(s) g_\nu(s) ds + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{i,k=1}^2 A_{\nu i}^{ik} \frac{\partial^\nu}{\partial s^\nu} G(x, s)|_{s=R_i} y^{(i)}(R_k) \right\} \quad (2)'$$

Dabei konnten nach Kamke mittels der Randbedingungen in den Randausdrücken alle Ableitungen n -ter und höherer Ordnung hinausgeworfen werden.

Gl. (2)' dient als Ausgangspunkt für eine Verallgemeinerung der üblichen Integralgleichungen. Diese werden durch Integralformen $\int u(x) v(x) dx$ bzw. $\int u^2(x) dx$ beherrscht, die jetzt durch allgemeinere Bilinearformen

$$(u, v) = \sum_{\nu, \varrho=0}^n \left\{ \int u^{(\nu)} v^{(\varrho)} d\sigma_{\nu \varrho} + \sum_{i,k} a_{\nu \varrho}^{ik} u^{(\nu)}(x_i) v^{(\varrho)}(x_k) \right\} \quad \dots (3)$$

ersetzt werden. Dabei seien $\sigma_{\nu \varrho}$ gegebene Belastungsfunktionen beschränkter Schwankung, $a_{\nu \varrho}^{ik}$ sind feste Konstanten, x_i, x_k endlich viele Punkte aus dem Grundgebiet. Die Form (u, v)

¹⁾ Es dürfen auch Glieder z. B. der Form $\iint F_{\nu \varrho}(x, s) u^{(\nu)}(x) v^{(\varrho)}(s) dx ds$ dazukommen.

kann z. B. für alle in $a \dots b$ stückweise stetigen Funktionen, die ebensolche Ableitungen bis zur n -ten Ordnung besitzen, gebildet werden — diese Gesamtheit soll als Grundbereich (oder Raum) \mathfrak{N} bezeichnet werden. Mit jedem Kern $K(x, s) \in \mathfrak{N}$ können nun „Integralgleichungen“ hingeschrieben werden, die (2)' umfassen:

$$y(x) = \lambda (K(x, s), y(s)) + f(x) \quad \dots \dots \dots (4).$$

$f \in \mathfrak{N}$ ist eine Störfunktion, $(K(x, s), y(s))$ wird bzgl. der Variablen s gebildet.

Hier interessiert besonders der Fall, daß $K(x, s)$ symmetrisch ist und die Ableitungen $\frac{\partial^{v+\varrho}}{\partial x^v \partial s^\varrho} K(x, s)$ für $v, \varrho = 0, \dots, n$ im Grundgebiet in beiden Variablen gleichzeitig stetig sind. Man erhält das wichtige Ergebnis:

Gehört solch ein Kern für jede Variable zu einem Funktionsbereich \mathfrak{D} (d. h. einer linearen Funktionengesamtheit) aus \mathfrak{N} , für welchen die Form (u, v) $u, v \in \mathfrak{D}$ symmetrisch und positiv-definit ist²⁾, so läßt sich auf (4) sofort die bekannte Integralgleichungstheorie für symmetrische Kerne ausdehnen. Wie früher lassen sich Existenz und Abzählbarkeit der Eigenwerte, Entwicklungssätze für iterierte Kerne und quellenmäßig dargestellte Funktionen beweisen. (Bei den Entwicklungssätzen ist die Konvergenz sogar der n -ten Ableitung noch gleichmäßig³⁾).

Gibt es keinen Bereich \mathfrak{D} , der $K(x, s)$ enthält, so liegt eine Verallgemeinerung der polaren Integralgleichung vor. Auch sie läßt sich bei symmetrischem (u, v) und definitivem Kern⁴⁾ sofort der gleichen Beweisführung unterordnen — die störende Diskrepanz bei der Behandlung gewöhnlicher und polarer Integralgleichung verschwindet. Dazu wird die Ausgangsgleichung iteriert. Bei z. B. der homogenen Aufgabe erhält man

$$y(x) = \lambda^2 (K(x, s), (K(s, \xi), y(\xi))) = \mu \langle K(x, s), y(s) \rangle \quad \dots \dots \dots (4)',$$

und es kann

$$\langle u(s), v(s) \rangle = (u(s), (K(s, \xi), v(\xi))) = ((K(s, \xi), u(s)), v(\xi))$$

als neue in ganz \mathfrak{N} symmetrische und definite Bilinearform verwendet werden. In dieser Maßform gehört das Problem wieder zu (4) und es ist $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{D}$ und $K(x, s) \in \mathfrak{D}$. Die hierfür gültigen Ergebnisse können sofort auf die Ausgangsgleichung zurückübertragen werden.

Die allgemeine Theorie zur Gl. (4) umfaßt über Gl. (2)' alle Kamkeschen selbstadjungierten links (M)- oder rechts (N)-definiten Randwertprobleme der Gl. (1)⁵⁾. An Hand der Extremaldarstellung der Eigenwerte erkennt man sofort, daß sogar alle (M)- oder (N)-definiten „natürlichen Eigenwertaufgaben“⁶⁾ erfaßt werden. Von den speziellen Ergebnissen sei nur ein Entwicklungssatz erwähnt. Er umfaßt bei absolut gleichmäßiger Konvergenz bis zu den $(m-1)$ -ten Ableitungen alle Funktionen, die ebensoviele stetige und eine stückweise stetige m -te Ableitung besitzen und die wesentlichen Randbedingungen (nach Kamke) erfüllen.

Weitere Anwendungsgebiete der Gl. (4) lassen sich nur andeuten. Es werden z. B. die Aufgaben⁷⁾

$$M(y) + \int F(x, s) y(s) ds = \lambda \{N(y) + \int L(x, s) y(s) ds\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

ebenso eingeordnet wie die Gleichung für die Schubbeulung einer Platte:

$$\Delta \Delta z = -\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{mit} \quad z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ am Rand (Einspannungsfall)} \quad \dots (6).$$

Bei (6) (einem Beispiel für zweidimensionale Aufgaben) kann wieder die bei vernünftigen Gebieten existierende positiv-definite Greensche Funktion $I'(x, s; \xi, \eta)$ ausgenutzt werden. Man kommt nach Iteration auf

$$z(x, y) = \lambda^2 \langle I'(x, y; \xi, \eta), z(\xi, \eta) \rangle \quad \text{mit} \quad \langle u, v \rangle = \iiint \int \frac{\partial^2 I'(x, y; \xi, \eta)}{\partial x \partial \xi} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \eta} dx dy d\xi d\eta \quad (6)'$$

und das läßt sich wieder der Theorie zu Gl. (4) einordnen.

²⁾ Bei z. B. $(u, v) = \int g u'' v'' dx + \int h u v dx$, $g, h > 0$ ist einfach $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{N}$.

³⁾ Bei unsymmetrischen Kernen bleibt die Fredholmsche Theorie gültig.

⁴⁾ Es genügt sogar, wenn erst die Form $\langle u, v \rangle$ nach Gl. (4)' in einem Bereich \mathfrak{D}_1 , dem wieder $K(x, s)$ angehören muß, symmetrisch und positiv-definit ist.

⁵⁾ Es genügt allerdings die Behandlung (M)-definiter Aufgaben, (N)-definite Probleme haben zufolge $f_m \neq 0$ nur für ein Vorzeichen ∞ viele Eigenwerte. Eine Spektralverschiebung führt daher immer zu (M)-definiten Formen.

⁶⁾ E. Stiefel und H. Ziegler: Natürliche Eigenwertprobleme. ZAMP I (1950), S. 111—138.

⁷⁾ L. Collatz: Z. angew. Math. Mech. 25—27 (1947), S. 129—130.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Auffassung der Integralgleichung als „Bilinearform mit Kern“ Erweiterungen ermöglicht, welche die Mehrzahl aller praktischen Eigenwertaufgaben umfassen⁸⁾. Dabei bleiben die eleganten und elementaren Beweisführungen der klassischen Integralgleichungstheorie erhalten. (Im Hinblick auf numerische Fragen wurde vom Vf. die konstruktive Beweisaneinanderordnung von E. Schmidt bevorzugt.)

Referate der Vorträge:

H. Friedman, Oxford/Heidelberg: Zur Mathematik der Gestalt,

H. Berger, Wien: Eine Erweiterung des Abbildungssatzes von H. A. Schwarz auf zweifach zusammenhängende Bereiche,

J. Dörr, Darmstadt: Über zwei Integralgleichungen 1. Art, die sich mit Hilfe Mathieuscher Funktionen lösen lassen

sind nicht eingegangen.

C. Mathematische Maschinen und Instrumente

Einige neue mechanische Integriergeräte

Von Th. Erismann in Schaffhausen

(A. J. Amsler & Co. in Schaffhausen, Schweiz)

Bei der Verarbeitung unregelmäßiger Funktionen und insbesondere bei der Auswertung registrierter Meßwerte sind die Analogiemethoden den heute sehr beliebten digitalen Methoden grundsätzlich überlegen, da die letzteren in diesen Fällen einer bedeutenden Vorbereitungsarbeit bedürfen. Gerade bei derartigen Aufgaben spielt die beschränkte Genauigkeit der Analogiemethoden meist keine Rolle.

Obwohl die Entwicklung der mechanischen Integriergeräte (wohl der wichtigsten Analogiegeräte) heute schon über hundert Jahre alt ist, so ist sie dennoch durchaus nicht abgeschlossen.

So konnte das Planimeter in den letzten Jahren beträchtlich verbessert werden: Das übliche Schneckengetriebe mit der Zählscheibe zum Zählen der vollen Rollenumdrehungen wurde durch ein Zahnradgetriebe ersetzt, das die koaxiale Anordnung zweier Ablesetrommeln gestattet (Bild 1). Dieses sog. Integrierzählwerk kann also fast wie ein Zähler abgelesen werden, was die Ermüdung und die Wahrscheinlichkeit von Ablesefehlern stark verringert. Der Preis liegt dank rationeller Herstellung nicht höher als bei älteren Planimetern.

Naturgemäß wurde das neue Integrierzählwerk für eine Anzahl weiterer Geräte verwendet, so z.B. für ein Scheibenplanimeter, eine Reihe von Potenzintegratoren und ein Integrimeter. Bei diesem letzteren ist es dank der geschickten Anordnung möglich, das Integral $\int y dx$ im gesamten Bereich $-250 \text{ mm} < y < +250 \text{ mm}$ laufend zu vermessen.

Eine andere Reihe von Geräten beruht auf dem 1886 durch Hele Shaw erfundenen Kuglintegrator, z.T. auch auf dem entsprechenden Kugeldifferenziator von J. Amsler.

Das einfachste dieser Geräte ist ein Integrator zur laufenden Registrierung des Integrals $\int y dx$ (Bild 2). Bei diesem Instrument erhält die Kugel ihren Antrieb nach dx durch unmittelbares Abrollen auf dem Lineal. Ihre Drehachse wird von zwei Steuerrollen bestimmt, die vom Fahrstift F über einen Pantographen und eine Tangentenmechanik geschwenkt werden. Das Resultat wird von der bei J gelagerten Integrierrolle über eine Reibungskupplung und ein

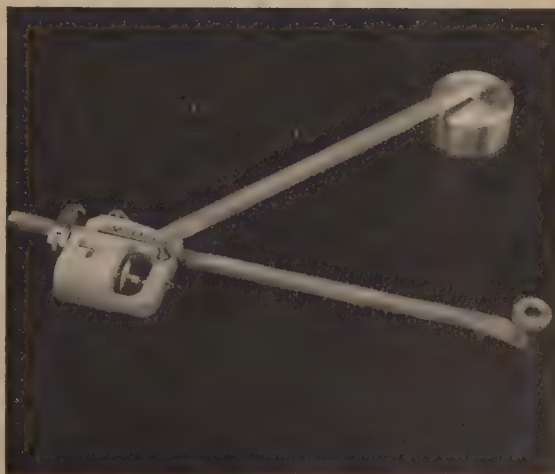


Bild 1

⁸⁾ Der Bereich der vollstetigen Transformationen wird noch nicht verlassen.

Zahnrad auf die Zahnstange Z übertragen, die die Schreibfeder S trägt. Wird der Hub der Schreibfeder erschöpft, so kann diese unter Überwindung der erwähnten Kupplung in die entgegengesetzte Endlage zurückgeschoben werden. Damit ist eine Auswertung praktisch beliebig langer Diagramme möglich. Das Erreichen der Endlagen wird durch ein akustisches Signal angezeigt.

Auf Grund seiner besonderen Eigenschaften (gute Genauigkeit, Übertragung eines beträchtlichen Drehmomentes ohne Nachlaufsteuerungen) wird das Kugelgetriebe seit langem mit Erfolg bei Integrieranlagen verwendet. Die erste davon war der Registriertisch für Dynamometerwagen mit vier Kugelgetrieben, der seit 1913 in vielen Exemplaren fast unverändert hergestellt wurde. Es handelt sich hierbei um eine ausgesprochene Einzeck-Anlage, d.h. um eine Anlage mit einer einzigen unveränderlichen Schaltung.

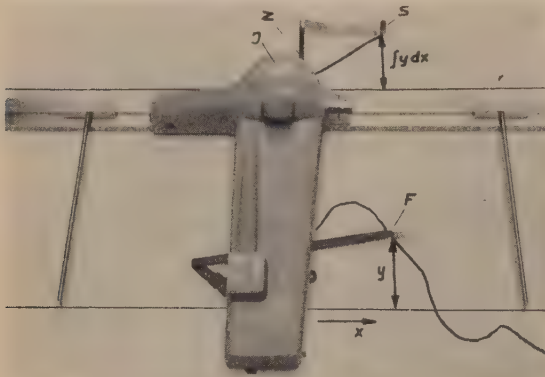


Bild 2

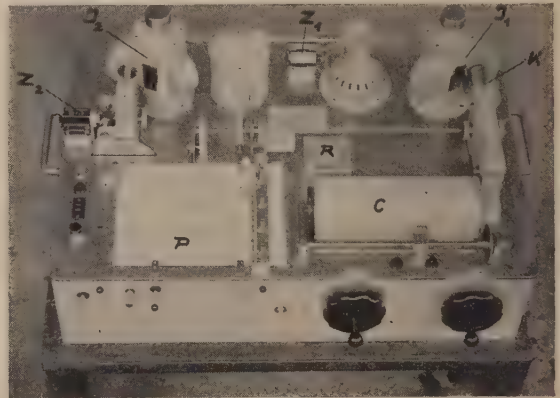


Bild 3

Die guten Erfahrungen, die mit diesen Registriertischen gesammelt werden konnten, wurden in den letzten Jahren an einer Reihe weiterer Einzeck-Anlagen ausgewertet. Als verkleinerte und modernisierte Ausgabe des Registriertisches entstand ein Prüfaggregat für Triebwagen und Traktoren.

Ferner ein Fahrdiagraph, der nach der bekannten Knorr-Schaltung arbeitet. In Bild 3 sind bei J_1 und J_2 die beiden Integratoren (Beschleunigung-Geschwindigkeit und Geschwindigkeit-Zeit) sichtbar, bei C die Zugs-Charakteristik, bei R das Zifferblatt zum Einstellen der Rampen, bei Z_1 und Z_2 die beiden Zähler für Zeit und Strecke und bei P das Papierband, auf dem vor Beginn der Arbeit die Rampen eingetragen wurden und das zur laufenden Registrierung der Geschwindigkeit und der Zeit in Funktion der Strecke dient. Eine Reihe von Hilfseinrichtungen ermöglicht ein außerordentlich einfaches Arbeiten, so vor allem eine automatische Kupplung K , die das Überschreiten einer beliebig einstellbaren Geschwindigkeitsgrenze verhindert.

Während des zweiten Weltkrieges wurde für die Schweizer Armee eine Anlage zur Berechnung von Geschossflugbahnen gebaut, welche sowohl die Aufzeichnung der Flugbahnen als auch die Aufnahme der Schießtabellen erlaubt. Durch besondere Maßnahmen konnte hierbei eine hervorragende Gesamtgenauigkeit erreicht werden.

Die erwähnten Einzeck-Integrieranlagen gestatten bei verhältnismäßig bescheidenem Aufwand eine sehr gute Anpassung an die gestellten Aufgaben. Ihre Wirtschaftlichkeit ist dadurch bedingt, daß die betreffenden Aufgaben immer wieder neu gelöst werden müssen. Wo dies nicht der Fall ist, kann eine universelle Integrieranlage interessant sein. Eine solche steht gegenwärtig in Entwicklung, z.T. schon in Erprobung und dürfte noch im Laufe dieses Jahres die ersten praktischen Aufgaben bearbeiten.

Erste Erfahrungen mit dem programmgesteuerten Recheng Gerät Z4 von K. Zuse

Von Heinz Rutishauser in Zürich

Der Vortragende bespricht einige numerische Probleme, welche am Institut für angewandte Mathematik der ETH (Zürich) mit Hilfe der Z4 gelöst wurden und hebt einige Fälle hervor, wo die Verwendung einer programmgesteuerten Rechenmaschine eine Modifikation der Lösungsmethoden erfordert (Inversion von Matrizen und Lösung der Bipotentialgleichung durch Relaxationsrechnung).

Der Inhalt des Vortrags wird im Rahmen einer Mitteilung des Instituts für angewandte Mathematik der ETH ausführlich publiziert werden.

Über automatische Rechenplanfertigung bei programmgesteuerten Rechenmaschinen

Von *Heinz Rutishauser* in Zürich

Kurzer Bericht des Vortragenden über seine Untersuchungen. Es handelt sich darum, die Aufstellung eines Rechenplans für eine komplizierte Formel (oder Formelgruppe), welche oft eine erhebliche Arbeit ist und für welche die Konstruktion komplizierter Hilfsgeräte in Erwägung gezogen wird, durch die Rechenmaschine selbst ausführen zu lassen. Die beschriebenen Methoden ermöglichen auch das Rechnen im Körper der rationalen Funktionen mit einer programmgesteuerten Rechenmaschine.

Ein ausführlicher Bericht über diese Untersuchungen wird als Mitteilung des Instituts für angewandte Mathematik der ETH erscheinen.

Ein Referat des Vortrages:

A. Kuhlenkamp, Braunschweig: Neue Wege der maschinellen Lösung elementarer Rechenaufgaben bei hoher Stellenzahl

ist nicht eingegangen.

D. Stochastik

Die Zuverlässigkeit üblicher Vaterschaftsteste

Von *W. Ludwig* in Heidelberg

Der Vaterschaftstest zielt auf den Entscheid der Fragen ab, ob ein vorgegebener Mann (der „mögliche Vater“ V) als „wahrer Vater“ (V^+) eines vorgegebenen Kindes (K), bzw. welcher von mehreren V als plausibelster V^+ erklärt werden kann. Hierzu gibt es zunächst die *negativen* (Ausschluß-) *Verfahren*, z. B. daß, wenn K und Mutter die Blutgruppe 0 aufweisen, der V^+ nicht AB besitzen kann. Indes würden diese Methoden, auch wenn man alle bekannten streng erblichen Merkmale einbezöge, nur in einem praktisch noch ganz unzureichenden Ausmaße verantwortbare gerichtliche Entscheide gestatten. Ihnen gegenüber beruhen die *positiven Verfahren* auf überdurchschnittlicher Übereinstimmung zwischen K und V^+ gegenüber K und beliebigem V hinsichtlich irgendwelcher Merkmale, — geschaffen von *Essen-Möller* (1937f.). Möge ein K mit einem beliebigen Mann der Bevölkerung durchschnittlich im Bruchteil y_i der Fälle bez. Merkmal M_i übereinstimmen, hingegen K mit seinem V^+ im Bruchteil x_i , wobei meist $x_i > y_i$ sein wird, so läßt sich bei Betrachten von n Merkmalen und für den Fall nur eines nominierten V die Formel

$$W = 1 : \left[1 + Q \cdot \prod_i^n \left(\frac{y_i}{x_i} \right) \right] \dots \dots \dots (1)$$

aufstellen, in der bedeuten: W die (der Wahrscheinlichkeit proportionale) Plausibilität (likelihood), daß der nominierte V der V^+ sei; $Q = \frac{(1-w)}{w}$, wobei w = Häufigkeit, in der eine Mutter als V den V^+ nominiert; und \prod das Produkt der n Übereinstimmungsquotienten der als unkorrekt vorausgesetzten Merkmale. (Bei Nichtübereinstimmung bez. M_j ist x_j durch $1 - x_j$ und y_j durch $1 - y_j$ zu ersetzen.) Gegen diese Formel sind Bedenken erhoben worden, jedoch zu einem Großteile unerheblicher, unrichtiger oder unscharf begründeter Art, weitere noch nie. Zunächst fehlt in *Essen-Möller's* Originalformel unser Q — d. h. es ist $= 1$ gesetzt —, weil für einen „unbefangenen Gutachter“ ein nominiertes V ebensogut der V^+ sein könne oder nicht. Indes ist, mindestens in städtischen Bezirken, $w \geq 0,5$, also $Q \leq 1$. Betrachten wir nur 1 nicht-erbliches Merkmal (also $x = y$) und setzen $w = 75\%$, so folgte nach *Essen-Möller* für den Beklagten $W = 0,5$, während die richtige Formel (1) notwendig $W = w = 0,75$ liefern muß. Über das Ausmaß der durch Ignorierung irgendwelcher Korrelationen der M_i untereinander hatte sich bisher noch niemand geäußert. Berechnungen¹⁾ ergeben: Stimmen z. B. V und K in 2 Merkmalen mit je $x = 17\%$, $y = 3\%$ überein, so variiert das zugehörige W , sinkend von absolut positiver über fehlende zu absolut negativer Korrelation, zwischen $85\% - 97\% - 100\%$. Schließ-

¹⁾ Vgl. *W. Ludwig*, Homo (Mainz), i. Dr.; *R. Wartmann*, i. Dr.; *W. Ludwig u. R. Wartmann*, i. Dr.

lich ordnete man bisher diese Plausibilität in die Intervalle $1 - 0,9973 - 0,955 - 0,682 - 0,318 - 0,045 - 0,0027 - 0$ ein und schrieb ihnen die Bezeichnungen „Vaterschaft praktisch erwiesen“, „sehr wahrscheinlich“, „wahrscheinlich“ usw. bis „praktisch ausgeschlossen“ zu, die dem Richter als Unterlage dienten, — ohne zu bedenken, daß diese für Totalwahrscheinlichkeiten geschaffenen Spannen nur sehr bedingt auf Einzelwahrscheinlichkeiten übertragen werden dürfen. Schließlich wurden verschiedentlich, wenn sich zunächst ein niedriges W ergab, solange weitere Merkmale beizuziehen versucht, bis W eine entsprechende Höhe erreicht hatte, nicht aber, wenn sich schon anfänglich ein hohes W errechnete: ein weder statistisch noch juristisch einwandfreies Vorgehen. Andere Bedenken seien hier unterdrückt. Da sich die negativen Verfahren vorerst zu wenig effizient erweisen, verbleibt wohl nur die Möglichkeit sorgfältiger Einzelgutachten, ohne einen falsche Exaktheit vortäuschenden scharfen Zahlwert, oder die 1936 von R. A. Fisher inaugurierte Diskriminanzanalyse²⁾, die unserem Problem voll gerecht würde und je Distrikt nur eine einmalige und nicht sehr zeitraubende Vorarbeit erforderte, übdies den Test sehr verfeinern könnte. Daß sie für den Vaterschaftsnachweis bisher noch nicht angewandt wurde, beruht darauf, daß es diesen in jenen Ländern (England, Indien, USA), die dieses Verfahren kennen, im europäischen Sinne nicht gibt.

Die statistische Trennung sich in mehreren Merkmalen überlappender Individuengruppen (Diskriminanzanalyse)

Von R. Wartmann in Darmstadt

Häufig ergibt sich die Aufgabe, einzelne Elemente einzuordnen in eine von zwei oder mehreren Individuengruppen. Da diese Klassifikation oft mühsam oder mit der Zerstörung des betreffenden Elementes verbunden ist, ist man bestrebt, diese Einordnung zu ermöglichen mittels einfach zu erhaltender Merkmale.

Von einer Anzahl Elemente mit bekannter Gruppenzugehörigkeit (etwa durch Anwendung des mühsamen Verfahrens) werden mehrere Maße abgenommen und deren Verteilung in den einzelnen Gruppen (genauer: Stichproben) aufgestellt. Ein Einzelmaß gibt ein Kriterium für die Gruppenzugehörigkeit nur dann, wenn die Verteilungen dieses Maßes in den einzelnen Gruppen sich sehr wenig überlappen. Man bildet daher aus all den Einzelmaßen ein neues „Rechenmaß“, für das dies möglichst zutrifft. Letzteres entsteht durch Addition der mit Faktoren multiplizierten Einzelmaße, wobei die Faktoren derart gewählt sind, daß die Überlappungen der Rechenmaß-Verteilungen der Gruppen ein Minimum werden. Für ein zur Entscheidung stehendes Element braucht man dann lediglich auf Grund seiner Einzelmaße seinen Rechenmaßwert zu ermitteln. — Zur Berechnung der Faktoren ist erforderlich die Kenntnis der Streuungen und Korrelationen der (Stichproben-)Einzelmaße, die Bestimmung der größten Wurzel eines in Determinantenform gegebenen Polynoms und die Auflösung eines linearen Gleichungssystems (Grad des Polynoms und Zahl der Unbekannten gleich Zahl der verwendeten Einzelmaße). Bei nur zwei Gruppen entfällt das Polynom. — Es ist möglich, die Wahrscheinlichkeit einer Mißklassifikation anzugeben und ferner die Signifikanz der Stichprobenunterschiede (bzw. Gruppenunterschiede) zu prüfen, falls diese nicht a priori festliegen. Schließlich kann man aus der Lage der Rechenmaß-Verteilungskurven der einzelnen Gruppen zueinander auf deren gegenseitige Verwandtschaft usw. schließen. Dieses ist meist auch beim Vorliegen qualitativer Merkmale möglich.

Neben dem linearen Rechenmaß ist (bei etwa doppeltem Arbeitsaufwand) eine quadratische Diskriminanzfunktion entwickelt. Letztere fällt auf die lineare zurück bei gleichen Streuungen in den Gruppen. Diese quadratische Diskriminanzfunktion geht von der Annahme aus, daß die in den Einzelmaßen mehrdimensionalen Simultanverteilungen der Gruppen Normalverteilungen sind und ordnet ein zur Entscheidung stehendes Element derjenigen Gruppe zu, für die die betreffende Merkmalskombination die größte Wahrscheinlichkeit hat.

Da die Güte der Klassifikation, aber auch der Arbeitsaufwand mit der Zahl der verwendeten Einzelmaße wächst, wurde eine Approximation aufgestellt, bei der der Fehler, den man durch ihre Anwendung begeht, gering ist gegenüber dem Gewinn, der erzielt wird durch die nun mögliche größere Zahl der Einzelmaße. Sind alle Korrelationskoeffizienten gleich, ist die Approximation mit der exakten Methode gleichwertig, andernfalls verwendet sie (automatisch) einen optimalen Durchschnittswert. Der vereinfachte Weg ist der folgende: Normierung der Einzelmaße, Addition zum Zwischenmaß „size“ und Addition nach Multiplikation mit Gewichten zum Zwischenmaß „shape“, Aufstellung der linearen oder quadratischen Diskriminanzfunktion. Die Gewichte ergeben sich auf einfache Weise aus den Mittelwert-Differenzen der Einzelmaße. Für ein frag-

²⁾ Hierzu vgl. den folgenden Vortrag R. Wartmanns.

liches Element erhält man z. B. somit als lineares Rechenmaß: $y = b \cdot a + p$ (a : size, p : shape, b : aus der Extremalbedingung errechneter Faktor — der zweite Faktor ist gleich eins gesetzt). Die Klassifikation wird getroffen, je nachdem y größer oder kleiner als ein y_0 ist (bei nur zwei Gruppen). In einem a/p -Koordinatensystem stellt aber $p = -b \cdot a + y_0$ eine Gerade dar. Liegt diese einmal gezeichnet vor, so klassifiziert man einfach dadurch, daß man feststellt, ob der durch den a - und p -Wert des Elementes gelieferte Bildpunkt auf dieser oder jener Seite der Geraden liegt. Die quadratische Diskriminanzfunktion liefert entsprechend als Grenzkurve eine solche zweiten Grades.

Poissonsche Verteilungskurven bei Versuchen mit Drillmaschinen

Von Hermann Blenk in Braunschweig

(Aus dem Inst. f. Landtechn. Grundlagenforschung in der Forschungsanstalt für Landwirtschaft)

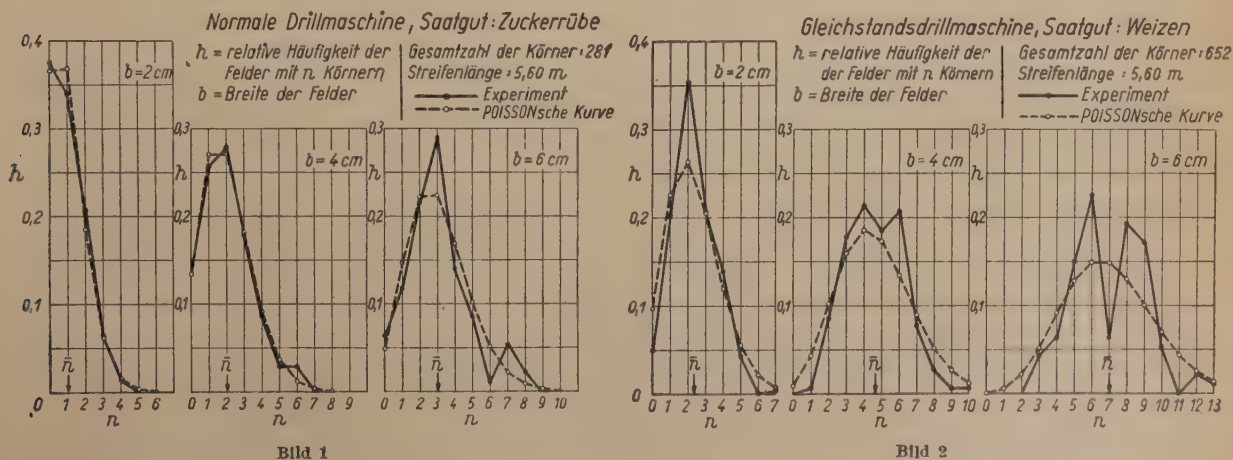
Drillmaschinen sollen das Saatgut in gleichmäßiger Tiefe und in regelmäßiger Folge im Ackerboden ablegen. Um die Regelmäßigkeit der Körnerablage zu prüfen, werden mit den Drillmaschinen im Laboratorium sog. Leimstreifenversuche angestellt. Die Körner fallen dabei auf einen Streifen Papier, der mit Leim bestrichen ist und die Körner an der Stelle festhält, wo sie auf das Papier auftreffen.

Die Gleichmäßigkeit der Tiefenablage kann man mit dem Leimstreifenversuch nicht prüfen. Man verzichtet meist auch auf eine Prüfung der horizontalen Komponente quer zur Bewegungsrichtung; d.h. man projiziert alle Körner auf eine Gerade in Richtung der Furche und prüft nur die Regelmäßigkeit der Körner in dieser Reihe.

Für die Beurteilung der Regelmäßigkeit einer Körnerreihe sind wiederholt Vorschläge entwickelt worden, so von R. Hege [1], A. König [2] und H. Zödler [3]. Man untersucht die Verteilung der Körnerabstände statistisch und leitet daraus eine mehr oder weniger empirische Formel für die Regelmäßigkeit ab. Statt die Körnerabstände zu bestimmen, kann man auch den ganzen Streifen durch Felder gleicher Breite b überdecken und nun auszählen, wie viele Felder gerade n Körner enthalten. Bezeichnet man mit h die relative Häufigkeit der Felder mit n Körnern, so müssen die Kurven $h(n)$ sich mit den bekannten Verteilungskurven von Poisson (Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse)

$$\varphi(n) = \frac{1}{n!} e^{-\lambda} \lambda^n \quad \left(\lambda = \frac{\text{Zahl der Körner}}{\text{Zahl der Felder}} \right)$$

vergleichen lassen. Dieser — m. W. erstmals angestellte — Vergleich brachte nun bei der Auswertung von Leimstreifenversuchen mit einer normalen Drillmaschine ein verblüffendes Ergebnis,



nämlich eine auffallend gute Übereinstimmung der experimentellen mit den Poissonschen Kurven, wie Bild 1 als Beispiel zeigt. Da die Wahl der Breite b eine Willkür bedeutet, ist die Auswertung für drei verschiedene Werte von b (2, 4 und 6 cm) durchgeführt worden. In allen drei Fällen stimmen die experimentelle und die Poissonsche Kurve gut überein. Daß sich für $b=6$ cm etwas größere Unterschiede zeigen als für 2 und 4 cm, liegt sicherlich daran, daß mit wachsendem b die Zahl der Felder je Streifen geringer wird.

Bild 2 zeigt das Ergebnis eines Versuchs mit einer sog. Gleichstandsdrillmaschine. Durch eine besondere Vorrichtung ist für eine größere Regelmäßigkeit beim Abgang der Körner gesorgt.

Der Vergleich mit den Poissonschen Kurven bestätigt den Erfolg der Konstruktion: die Werte n in der Nähe des Durchschnitts \bar{n} sind häufiger geworden, während die größeren Abweichungen seltener auftreten.

In Bild 3 sind eine Reihe von Versuchen dargestellt, bei denen nebeneinander eine normale und eine Gleichstandsdrillschar benutzt wurden. Über der Feldbreite b ist das Verhältnis Streuungsquadrat σ^2

Durchschnitt \bar{n} — aufgetragen. (Für die Poissonsche Verteilung sind σ^2 und \bar{n} beide $=\lambda$.) Für die normale Drillschar ergeben sich Werte bei 1 und sogar merklich darüber, während die Werte für die Gleichstandsdrillschar um 0,6 herum streuen. An der Überlegenheit der Gleichstandsdrillschar kann also kein Zweifel bestehen.

Auf Grund dieser Untersuchungen könnte man zur Beurteilung der Güte einer Drillmaschine die Größe $Z = 1 - \alpha \cdot \frac{\sigma^2}{\bar{n}}$ verwenden, wobei $\alpha = \frac{\text{Ertragsverlust bei } \sigma^2 = \bar{n}}{\text{Ertrag bei } \sigma^2 = 0}$ zu setzen

und durch biologische Versuche zu ermitteln wäre.

Die Streuung σ^2 wird, wie Bild 3 zeigt, von der Wahl der Feldbreite b nicht unwesentlich beeinflusst. Um diese Willkür¹⁾ auszuschalten, wäre es erwünscht, die Verteilung der Körnerabstände mit einer entsprechenden theoretischen Verteilung vergleichen zu können. Diese Vergleichsverteilung könnte man sich auf folgende Weise verschaffen: Man ordnet die Körner zunächst in gleichen Abständen a voneinander an und verschiebt dann jedes Korn nach vorn oder hinten um einen Betrag x . Für dieses x wird eine Gaußsche Verteilung mit bestimmter Streuung s^2 (bezogen auf a) angenommen. Bei dieser Verschiebung

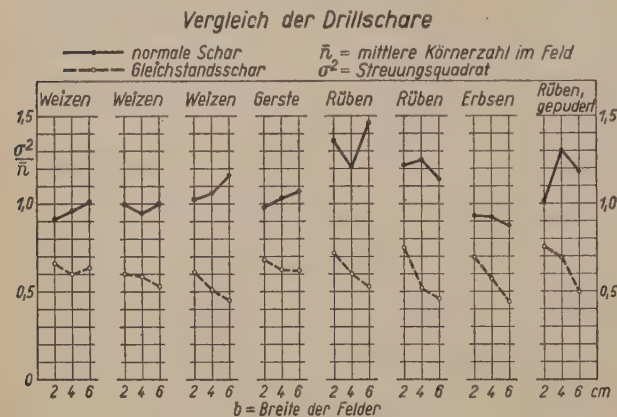


Bild 3

nehmen die Körner eine neue Reihenfolge an. Es käme nun darauf an, dieser Vorschrift entsprechend die Verteilungsfunktion der Abstände aufeinanderfolgender Körner, abhängig von s/a , zu berechnen.

Literatur

- [1] R. Hege: Beitrag zur Bewertung der Säarbeit von Drillmaschinen, insbesondere der Körnerverteilung in der Reihe und in der Tiefenlage. Diss. Berlin-Charlottenburg 1948.
- [2] A. König: Verfahren zur Beurteilung der Gleichmäßigkeit einer geradlinigen Punktreihe und seine Anwendung bei Drillmaschinenprüfungen. Diss. München 1933.
- [3] H. Zödler: Eine neue Methode zur Auswertung von Leimstreifenversuchen. Techn. in d. Landwirtschaft. 9 (1928), S. 4. — Leimstreifenauswertungsmethoden und Leimstreifenversuche an Drillmaschinen. Diss. Breslau 1930. — Der Gütemaßstab für eine Folge ausgesäter Körner. Techn. in d. Landwirtschaft. 11 (1930), S. 231. — Die schaubildliche und die statistische Bewertung von Körnerfolgen. Techn. in d. Landwirtschaft. 24 (1943), S. 21.

E. Mechanik

Die Trägheitspolkurve, ein Beitrag zur Dynamik des ebenen Systems

Von Karl Federhofer in Graz

Die Trägheitspolkurve entsteht als Ort der Trägheitspole eines kontinuierlich bewegten ebenen Systems. Mit der Kenntnis der Lage des Drehpoles P , des Wendepoles J und mit den bekannten dynamischen Eigenschaften der Scheibe (Schwerpunkt S und Trägheitshalbmesser i_s) ist die Lage des Trägheitspoles T bestimmt, und zwar gilt hierfür die einfache Vektorgleichung:

$$\mathbf{r}_T = -\mathbf{r}_J \frac{i_s^2}{r_P \cdot r_J},$$

¹⁾ Die weitere Willkür, die in der Wahl des Anfangspunktes der Felder über den Leimstreifen steckt, dürfte kaum einen nennenswerten Einfluß haben können.

wo die den Punkten T, P, J entsprechenden Ortsvektoren r auf den Schwerpunkt S als Aufpunkt bezogen sind.

Man kann die Trägheitspolkurve auf ein festes oder auf das bewegte System beziehen, analog wie die Rast- und Gangpolbahn des Drehpoles, bzw. wie die Kurven für den Beschleunigungspol.

Bei Anwendung auf das zentrische Schubkurbelgetriebe zeigt sich, daß die Trägheitspolkurve der Koppel, bezogen auf die bewegte Koppel, mit großer Näherung durch eine Gerade senkrecht zur Koppelachse ersetzt werden kann, auf der innerhalb eines ganz bestimmten Bereiches die Trägheitspole für den vollen Umlauf der Kurbel liegen.

Ausführliche Darstellung erscheint im Bd. V (1951) des Österr. Ing.-Archivs.

Die stabilen Lagen eines n -fachen ebenen Pendels mit vertikal periodisch erschüttertem Aufhängepunkt¹⁾

Von *W. Haacke* in Braunschweig

Stabilisierungsphänomene eines erschütterten einfachen Pendels und seines elektromagnetischen Analogons sind in den letzten Jahrzehnten mehrfach behandelt worden. Gerade in Hinblick auf die elektrotechnischen Abbildungen liegt es nahe, ein mehrfaches ebenes Pendel mit erschüttertem Aufhängepunkt zu betrachten. Als erster Schritt auf diesem Wege soll hier der Fall der vertikalen Erschütterung eines n -fachen ebenen physikalischen Pendels untersucht werden. Wir erhalten ein Differentialgleichungssystem, das sich durch eine lineare Transformation entkoppeln läßt. Auf die einzelnen entkoppelten Differentialgleichungen läßt sich dann die bekannte Theorie der Mathieschen Differentialgleichung, besonders die der Struttischen Karte anwenden.

Das ebene Pendel schwinde in einer x, y -Ebene. Φ_σ sei der Winkel, den der σ -te Pendelarm mit der positiven y -Achse bildet, die Erdbeschleunigung g wirke in negativer y -Richtung. Es ergibt sich ein System von n gekoppelten, nichtlinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Wir

wollen nach der Existenz von Mittellagen $\alpha_\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_\sigma(\tau) d\tau$ fragen, um die die Pendelarme

Schwingungen ausführen sollen. Setzen wir $\varphi_\sigma = \Phi_\sigma - \alpha_\sigma$ und beschränken uns auf die Betrachtung solcher kleinen Schwingungen, so läßt sich das Differentialgleichungssystem für die φ_σ linearisieren und erhält folgende Gestalt:

$$A_\varrho \varphi_\varrho'' + B_\varrho \sum_{\kappa=1}^{\varrho-1} l_\kappa \cos(\alpha_\varrho - \alpha_\kappa) \varphi_\kappa'' + l_\varrho \sum_{\sigma=\varrho+1}^n B_\sigma \cos(\alpha_\varrho - \alpha_\sigma) \varphi_\sigma'' - B_\varrho \left(\frac{g}{\omega^2} - p \cos u \right) \cos \alpha_\varrho \cdot \varphi_\varrho = B_\varrho \left(\frac{g}{\omega^2} - p \cos u \right) \sin \alpha_\varrho \quad (\varrho = 1 \dots n).$$

Darin sind die A_ϱ und B_ϱ positive Konstante, die sich aus den Massen, Längen und Trägheitsmomenten der Pendelarme zusammensetzen, l_i der Abstand der Drehpunkte des i -ten Pendelarms und $y = p \cdot \cos \omega t$ die Erschütterung des Aufhängepunktes. Die unabhängige Veränderliche ist $u = \omega t$. Dieses lineare System hat die konstante Partikularlösung $\varphi_\varrho = -\tan \alpha_\varrho$, wie man durch Einsetzen sofort sieht. Daher brauchen wir uns nur noch mit dem homogenen System zu befassen. Dieses schreiben wir in der Gestalt $\mathfrak{E} \mathfrak{x}'' = h(u) \mathfrak{D} \mathfrak{x}$. Dabei ist \mathfrak{E} eine konstante, symmetrische und positiv definite Matrix. Letzteres zeigt man durch eine Umformung der zugeordneten quadratischen Form. \mathfrak{D} ist eine konstante indefinite Diagonalmatrix. Weiter ist

$h(u) = \frac{g}{\omega^2} - p \cos u$. Wir transformieren dieses System mit Hilfe des Ansatzes $\mathfrak{x} = \mathfrak{F} \mathfrak{y}$, wobei \mathfrak{F}

eine konstante Matrix mit nichtverschwindender Determinante sein soll. Dann ergibt sich $\mathfrak{E} \mathfrak{F} \mathfrak{y}'' = h(u) \mathfrak{D} \mathfrak{F} \mathfrak{y}$. Da $\det \mathfrak{F} \neq 0$, können wir diese Matrixengleichung von links mit der Transponierten \mathfrak{F}' multiplizieren: $\mathfrak{F}' \mathfrak{E} \mathfrak{F} \mathfrak{y}'' = h(u) \mathfrak{F}' \mathfrak{D} \mathfrak{F} \mathfrak{y}$. Da \mathfrak{E} und \mathfrak{D} symmetrisch sind, außerdem \mathfrak{E} positiv definit, gibt es eine reguläre Matrix \mathfrak{F} , so daß gleichzeitig $\mathfrak{F}' \mathfrak{E} \mathfrak{F}$ die Einheitsmatrix und $\mathfrak{F}' \mathfrak{D} \mathfrak{F} = \mathfrak{D}^*$ eine Diagonalmatrix wird, deren Elemente die Wurzeln der Gleichung

$\det(\varepsilon \mathfrak{E} - \mathfrak{D}) = 0$ sind. Dann lautet also das System: $y_\varrho'' - \left(\frac{g}{\omega^2} - p \cos u \right) \varepsilon_\varrho y_\varrho = 0 \quad (\varrho = 1 \dots n)$. Nach

Floquet haben die Lösungen dieser Gleichungen die Form: $y_\varrho = d_{1\varrho} e^{i\mu_\varrho u} \tilde{f}_\varrho(u) + d_{2\varrho} e^{-i\mu_\varrho u} \tilde{f}_\varrho(-u)$ mit $\tilde{f}_\varrho(u) = \tilde{f}_\varrho(u + 2\pi)$. Nur wenn alle μ_ϱ reell und $\neq \frac{m}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) sind, können die

¹⁾ Die ausführliche Arbeit wird im Journal für reine und angewandte Mathematik erscheinen.

Lösungen η und damit auch ξ stabil sein. — Die oben angeführte Bedingung für die Mittellagen ist äquivalent mit $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \varphi_e(\tau) d\tau = 0$. Da diese Grenzwerte über alle homogenen Lösungen verschwinden, muß notwendig für die Existenz kleiner Schwingungen $\lg \alpha_e = 0$ ($e = 1 \dots n$) gelten. Jeder Pendelarm muß also um eine vertikale Lage schwingen. Daher gibt es 2^n mögliche Mittellagen. Um nun für eine spezielle dieser Mittellagen entscheiden zu können, ob sie tatsächlich vorhanden ist, setzen wir in $\det(\varepsilon \mathbb{C} - \mathfrak{D}) = 0$ die gewünschten α_e -Werte ein und können nun in der Struttischen Karte feststellen, ob alle Wertepaare $\lambda_\kappa = -\frac{g}{\omega^2} \varepsilon_\kappa$, $\gamma_\kappa = p \varepsilon_\kappa$ ($\kappa = 1 \dots n$) in stabilen Bereichen liegen. Dann und nur dann, wenn dies der Fall ist, existieren kleine Schwingungen um die fragliche Mittellage.

Zum Schluß soll ein zahlenmäßiges Beispiel betrachtet werden. Wir wählen ein Doppelpendel mit zwei zylindrischen Pendelarmen, 25 cm lang, Radius 1 cm. Die Erschütterungsamplitude sei 0,5 cm.

Lage 1: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. (Das Pendel ist nach oben gestreckt.)

Diese Lage ist stabil für alle Frequenzen $\frac{\omega}{2\pi} = \nu > \nu_0 = 83 \text{ Hz}$.

Lage 2: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$. Stabil für alle Frequenzen $\nu > \nu_0 = 56 \text{ Hz}$.

Lage 3: $\alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 0$. Stabil für alle Frequenzen $\nu > \nu_0 = 45 \text{ Hz}$.

Lage 4: $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$. (Die natürliche Gleichgewichtslage.) Das Pendel ist in dieser Lage im allgemeinen stabil. Es gibt aber zwei Folgen von Instabilitätsintervallen, deren Anfänge lauten:

$$\begin{array}{ll} 1,7 < \nu < 1,75 & 4,2 < \nu < 5,2 \\ 0,85 & 2,28 \\ 0,57 & 1,52 \end{array}$$

Für $p = 5 \text{ cm}$ sind die Lagen 1 und 2 nie stabil, die Lage 3 nur in einem schmalen Frequenzintervall zwischen 5 und 10 Hz. Bei der Lage 4 treten ähnliche Verhältnisse wie oben auf.

Verzögerungsfunktion

Von E. Altenkirch in Neunhagen bei Berlin

Die analytische Verfolgung eines mit Verzögerung auf den Fühler rückwirkenden Regelvorganges führt zu der Funktion

$$y = \sum_{v=0}^{\nu \leq x} (-1)^v \frac{(x-v)^{v+1}}{(v+1)!} \alpha^{v+1},$$

die eine Folge endlicher Potenzreihen darstellt. Ihre Untersuchung zeigt, daß bei $\alpha = \frac{1}{e}$ und bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ singuläre Punkte auftreten. Bei $\alpha < \frac{1}{e}$ ist die Funktion monoton konvergent, bei $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ konvergiert sie unter Pendelungen, bei $\alpha > \frac{\pi}{2}$ divergiert sie.

(Die Variablen sind dimensionslos. x enthält die Zeit, α die Verzögerung.)

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ liefert eine Sinusschwingung mit gedehnter Amplitude und Phasenverschiebung.

Bei $\alpha = 1$ sind die Abweichungen vom Beharrungszustand um diesen gleichmäßig verteilt. Die Annäherung an ihn ist gegenüber dem verzögerungsfreien Zustand verlangsamt.

Die α -Grenze gleicher Annäherungsgeschwindigkeit folgt aus

$$y = 1 - e^{-x\alpha}$$

für größere x zu $\alpha \sim 0,66$. Ist α kleiner, so ist die Annäherungsgeschwindigkeit stets größer.

$\alpha = \frac{1}{e}$ gewährt die schnellste Annäherung, die um ein Vielfaches größer ist als bei verzögerungsfreiem Vorgang.

Referate der Vorträge:

H. Pailloux, Saarbrücken: Quelques asservissements pouvant se traiter par la méthode de Lagrange,

H. Bückner, Minden i. W.: Regelstabilität und Übergangsfunktion sind nicht eingegangen.

F. Elastomechanik

Kinematographische Auflösung des Zerreivorganges

Von *Hubert Schardin* in Weil a. Rh.

Der Standardversuch zur Bestimmung der Materialfestigkeit ist das Zerreißen von Probestäben.

Im allgemeinen Falle schnürt sich ein Zugstab zunächst infolge plastischer Deformation (d.h. durch Gleiten und Zwillingsbildung) ein, wird schließlich spröde und zerreißt dann mit hoher Geschwindigkeit. Der Anteil des spröden Bruchs wird um so höher, je schneller die Belastung erfolgt. Amorphe Körper, bei denen keine neuen Gleichgewichtslagen existieren, sind von vornherein spröde.

Die im folgenden kurz wiedergegebenen Untersuchungen beziehen sich nur auf den spröden Bruch.

Ausgangspunkt waren Versuche an Glasplatten, die in den Glastechnischen Berichten¹⁾ wiedergegeben sind. Als Resultat derselben konnte festgestellt werden, daß nach kurzer Anlaufstrecke der Bruch mit der konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit von 1500 m/s sich durch das Glas bewegt. Mitunter findet eine Gabelung im Verlauf statt, der zunächst immer sehr genau senkrecht zur vorhandenen äußeren Zugspannung erfolgt.

ber die Dynamik des Abbaus der Zugspannung durch die dem Bruch vorauslaufenden elastischen Wellen konnten eine Reihe von Aussagen gemacht werden, so u. a. daß in größerem Abstand vor der Bruchfront in dessen Ebene zunächst die ursprüngliche Zugspannung aufrecht erhalten bleiben muß.

Unmittelbar vor der Bruchfront war auf den Aufnahmen ein „Spannungshof“ zu erkennen, der eine Zunahme der Zugspannung bedeutet. Dieser Spannungshof verschwindet, wenn der Bruch stehen bleibt.

Die dem Bruch vorauslaufenden elastischen Wellen konnten jedoch mit Glas als Versuchsmaterial nicht sichtbar gemacht werden. Daher wurden anschließend die im folgenden beschriebenen Versuche mit Plexiglasplatten durchgeführt.

Die Anordnung ist in Bild 1 wiedergegeben. Die Versuchsplatte ist mit Hilfe von Araldit zwischen Metallbacken geklebt. Ein Belastungsgewicht fällt auf einen Teller, wodurch die Zugspannung in der Plexiglasplatte hervorgerufen wird.

Die Auslösung der funkenkinematographischen Apparatur erfolgt zu Beginn des Zerreivorganges, indem un-

¹⁾ Ergebnisse der kinematographischen Untersuchungen des Glasbruchvorganges, Heft 1, 3 u. 12, Jahrgang 23 (1950).

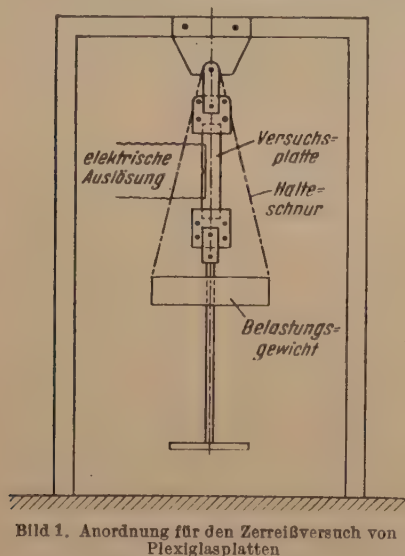


Bild 1. Anordnung für den Zerreiversuch von Plexiglasplatten

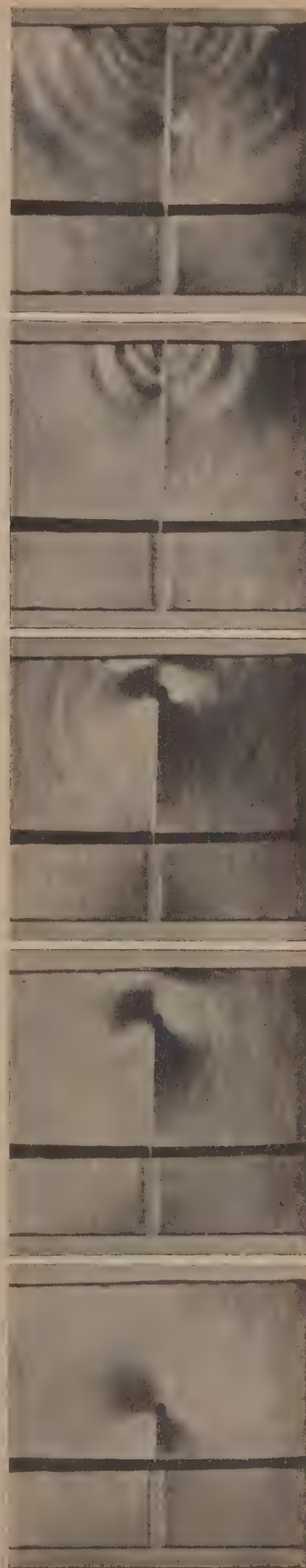


Bild 2. 5 Teilbilder aus einer kinematographischen Serie. Der schwarze Streifen bildet den Kontakt zur Auslösung. Schliffeneinstellung mit horizontaler Schliffeneinstellung. Bildfrequenz im Original 120 000/s. Plexiglasstreifen 50 mm breit, 2 mm stark

mittelbar neben einer Einkerbung — zur Festlegung des Ortes des Bruchbeginns — ein aufgedampfter Metallstreifen zerrissen wird. Die Aufnahme­frequenz der kinematographischen Apparatur beträgt im allgemeinen 100 000 Bilder in der Sekunde. Die Sichtbarmachung der elastischen Spannungen erfolgt teils schlieren- teils spannungsoptisch.

Bild 2 gibt eine Auswahl von fünf schlierenoptisch aufgenommenen Bildern einer kinematographischen Serie wieder. Man erkennt auf den ersten drei Bildern den laufenden Bruch. Er bildet die Grenze zwischen einem oben hellen und unten dunklen Gebiet. Diese Helligkeitsverteilung beruht darauf, daß die freien Bruchflanken auseinandergehen und die vorher planparallele Platte an diesen Stellen keilförmig wird. Das Licht wird infolgedessen wie in zwei Prismen (Basis = Bruchfläche) abgelenkt.

Vor der Bruchfront ist die Helligkeitsverteilung gerade umgekehrt, d.h. hier stoßen die „Prismen“ mit der Spitze in der Mitte zusammen: ein Beweis dafür, daß die Mitte vor der Bruchfront die höchsten Zugspannungen hat.

Unmittelbar vor der Bruchfront ist ein schwarzes Gebiet, d.h. ein Gebiet mit hohen Spannungen zu sehen, das sich auch in den spannungsoptischen Aufnahmen (Bild 3) wiederfindet.

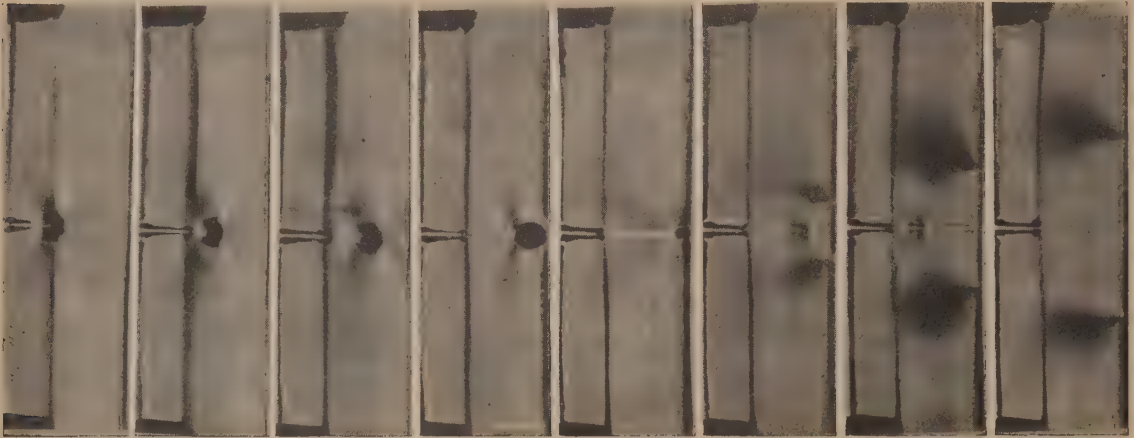


Bild 3. Spannungsoptische Bildserie. Plexiglasplatte 46 mm breit, 8 mm stark. Bildfrequenz im Original 100 000/s

Ferner sind nun auch auf diesen Aufnahmen die elastischen Wellen zu sehen, die dem Bruch vorauslaufen. Sie liegen gegeneinander exzentrisch. Nachdem der Bruch das Ende der Platte erreicht hat, starten von diesem Punkt am Rande neue sehr intensive Wellen. Der Spannungshof vor der Bruchfront bedeutet eine Konzentration von Spannungsenergie und wenn diese

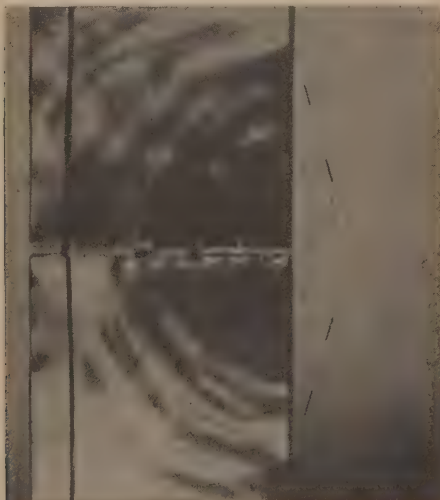


Bild 4. Nach vollständigem Durchriß der Plexiglasplatte entsteht, vom rechten Rand ausgehend, eine Luftschallwelle. (Der Deutlichkeit in der Reproduktion halber ist die „Tangente“ an den „Kreis“ durch Striche gekennzeichnet)

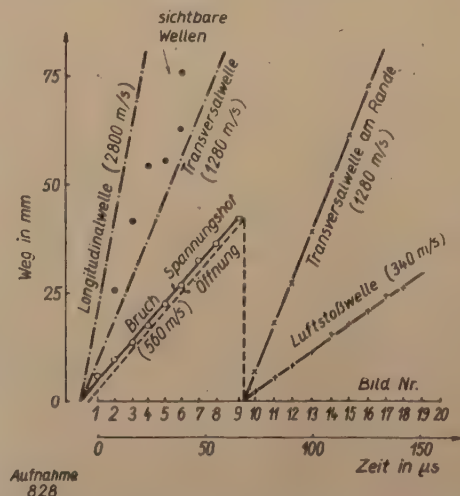


Bild 5. Auswertung einer kinematographischen Aufnahme des Zerreißversuches einer Plexiglasplatte (50 mm breit, 4 mm stark). Bildfrequenz rund 100 000/s.

beim Einlaufen des Bruches in den Rand plötzlich frei wird, so muß sich die Energie in Wellenform in die Platte hinein ausbreiten.

Besonders deutlich ist das auch auf den spannungsoptischen Aufnahmen zu sehen (Bild 3.)

Die ersten vier Bilder dieser Serie zeigen den laufenden Bruch. Auf dem fünften Bild ist der Bruch gerade in den Rand eingelaufen. Und nun erkennt man auf den folgenden drei Bildern wieder die Ausbreitung der elastischen Spannung in etwas anderer Form.

Diese Expansion ist sogar mit der Bildung einer Schallwelle in Luft verknüpft, die man auf den Schlierenaufnahmen erkennen kann (Bild 4). Die Luftwelle zeichnet sich ab als ein Kreis mit zwei Tangenten, die in den Rand der Platte dort einlaufen, wo sich die am Rande entlanglaufende Transversalwelle befindet. Dieser Punkt ist auf den spannungsoptischen Aufnahmen besonders deutlich, aber auch auf den schlierenoptischen Bildern zu erkennen.

Die vorliegende Form der Luftschallwelle ergibt sich, wenn man annimmt, daß nach dem vollständigen Durchriß der rechte Rand sich keilförmig aufweitet. Für diesen Fall ist die Bildung der Stoßwelle von M. J. Lighthill¹⁾ theoretisch ermittelt worden.

Bild 5 bringt schließlich ein Beispiel für die Auswertung einer Aufnahme (Bild 4 hierzu gehörig).

Der Bruch selbst breitet sich mit 560 m/s aus. In diesem Falle war jedoch der Bruchweg vorher mit kleinen Anbohrungen versehen worden, um stärkere Inhomogenitäten zu haben. Ist das nicht der Fall, so ist die Bruchgeschwindigkeit kleiner (Werte zwischen 305 und 460 m/s).

Mit dem Bruch starten auch die elastischen Wellen, von denen die Lage der jeweils ersten sichtbaren eingetragen ist; die Weg-Zeitkurven der primären Longitudinal- und Transversalwelle ergeben sich auf Grund anderweitiger Messungen.

Der Aufnahme unmittelbar sehr genau zu entnehmen ist jedoch die Transversalwelle, die am rechten Rande nach vollständigem Durchriß entlangläuft.

Für die Ausbreitung der Schallwelle in Luft gilt in guter Übereinstimmung mit dem Versuch die normale Schallgeschwindigkeit von 340 m/s.

Die obigen Untersuchungen sind als experimentelle Grundlage für die Erforschung des Bruchvorganges gedacht. Theoretische Betrachtungen müssen immer von mehr oder weniger idealen Voraussetzungen ausgehen. Wie diese zu wählen sind, läßt sich leichter an Hand bereits vorliegenden Versuchsmaterials entscheiden.

Zum Problem der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper

Von E. Mettler in Clausthal

Die bisherige Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper²⁾ geht im allgemeinen von einer Grundbewegung aus, die mittels der klassischen Elastizitätstheorie berechnet wird, und untersucht das Verhalten der Nachbarbewegungen mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen unter Berücksichtigung der höheren Glieder, die von der Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen geliefert werden. An einem speziellen Beispiel der erzwungenen Querschwingungen des geraden, beiderseits in festen Gelenken gelagerten Stabes soll nun gezeigt werden, daß man zu weiteren Instabilitätsfällen kommt, wenn man schon die Grundbewegung mittels genauerer, höhere Glieder in den Verschiebungen enthaltender Gleichungen berechnet.

Es seien u und w die Verschiebungen der Stabachse in Längs- und Querrichtung. Die x -Achse liege in der Stabachse. Tiefstehende Indizes x und t bedeuten wie üblich partielle Ableitungen. Die Querbelastung wird speziell zu $q = q_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega t$ (q_1 und $\omega = \text{const}$, $l = \text{Stablänge}$) angenommen. Dann lauten die Differentialgleichungen für die Längs- und Querbewegung des Stabes mit den gewöhnlichen Bezeichnungen

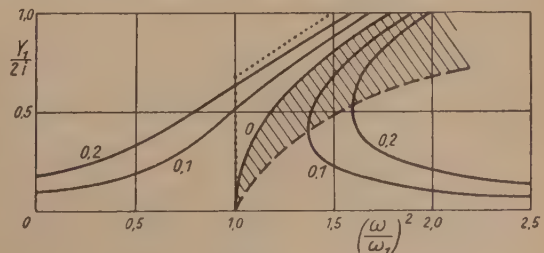


Bild 1

$$\left. \begin{aligned} -EF \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} \right) + \mu u_{tt} &= 0 \\ -EF \frac{\partial}{\partial x} \left[w_x \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} \right) \right] + EJ w_{xxxx} + \mu w_{tt} &= q \end{aligned} \right\} \begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix} \quad \dots \dots \dots (1) \quad \dots \dots \dots (2)$$

¹⁾ Proc. Roy. Soc. 200, S. 564 (1950).

²⁾ Vgl. E. Mettler: Ing.-Arch. 16 (1947), S. 136 und 17 (1949), S. 418 und die dort angegebene Literatur. Ferner: G. F. Carrier: Proc. Symposia appl. Math. 1 (1949), S. 175.

³⁾ Zur Ableitung dieser Gleichungen im einzelnen vgl. K. Marguerre: Jb. dtsch. Luftfahrtforsch. (1938), S. I 433 und E. Mettler: Ing.-Arch. 13 (1942), S. 97.

und die Randbedingungen

$$u = w = w_{xx} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, l \quad \dots \quad (3).$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem läßt sich näherungsweise lösen, wenn man die plausible (und nachträglich kontrollierbare) Annahme einführt, daß die Dehnung $\varepsilon = u_x + \frac{w_x^2}{2}$ der Stabachse von x unabhängig ist. Dann erhält man nämlich durch Integration nach x über die Stablänge und Berücksichtigung der Randbedingungen (3) die Längskraft

$$S = EF \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} \right) = \frac{EF}{l} \int_0^l \frac{w_x^2}{2} dx \quad \dots \quad (4),$$

und durch Einsetzen von (4) in (2) wird aus (2) eine Integrodifferentialgleichung für w allein⁴⁾, die sich durch den Ansatz $w = y(t) \sin \frac{\pi x}{l}$ integrieren läßt. Man findet für y die Gleichung

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y (1 + \beta y^2) = p \cos \omega t \quad \dots \quad (5)$$

mit

$$\omega_1^2 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{EJ}{\mu}, \quad \beta = \frac{1}{4} \frac{F}{J} = \frac{1}{4 i^2}, \quad p = \frac{q_1}{\mu}.$$

Von Gl. (5), der Gleichung des Einmassenschwingers mit nichtlinearer Federkennlinie, ist die periodische Lösung

$$y = Y_1 \cos \omega t + Y_3 \cos 3 \omega t + \dots \quad \dots \quad (6)$$

bekannt, wobei Y_1 aus Bild 1 abgelesen werden kann⁵⁾. Der dort eingetragene Parameter ist $y_0/2i$, wo y_0 die klassische Durchbiegung unter der statischen Last $q_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ bedeutet. Ferner ist in guter Näherung⁶⁾

$$\frac{Y_1}{Y_3} = 36 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{2i}{Y_1} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{9} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right] - 6.$$

Bleibt man in Bild 1 rechts von der punktierten Linie, so wird $Y_3/Y_1 \leq 0,024$. Es genügt also für unsere Zwecke, in (6) das erste Glied zu berücksichtigen. Zur Kontrolle der Lösung kann man nun $w_x^2/2$ als bekannte Funktion in (1) einsetzen, diese Gleichung für u integrieren und dann prüfen, ob die Annahme, daß ε unabhängig von x sein soll, ausreichend erfüllt ist. Die Rechnung liefert

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 Y_1^2 \left(1 + \cos 2 \omega t \left\{ 1 + \cos \frac{2 \pi x}{l} \left[1 - \frac{1}{1 - \omega^2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{\mu}{EF}} \right] \right\} \right),$$

und dieser Ausdruck ist in der Tat um so weniger mit x veränderlich, je tiefer ω^2 unter dem Längseigenfrequenzquadrat $\omega_L^2 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{EF}{\mu}$ liegt. Für Stäbe mittlerer Schlankheit ist die Näherung befriedigend, wenn ω in die Nähe von ω_1 fällt.

Das Stabilitätsverhalten der Lösung von (5) ist bekannt. Die in dem schräg schraffierten Gebiet von Bild 1 liegenden Kurvenäste sind instabil. Die Bewegung zeigt die sog. Kipperscheinungen. Das läßt sich im einzelnen ableiten, indem man die berechnete Biegeschwingung als Grundbewegung betrachtet und daneben eine spezielle gestörte Bewegung annimmt, für die gleichfalls die Längskraft örtlich unveränderlich ist. Man kommt in einfacher Weise auf die übliche Mathiegleichung, welche die Nachbarbewegung beschreibt und deren erster Instabilitätsbereich sich auf das in Bild 1 schraffierte Gebiet abbildet.

⁴⁾ Das gleiche Integral für S und die entsprechende Integrodifferentialgleichung für die freien Stabschwingungen wird (allerdings mit anderer Herleitung) benutzt von S. Woinowsky-Krieger: J. Appl. Mech., New York 17 (1950), S. 35.

⁵⁾ Nach K. Marguerre: Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950, S. 136.

⁶⁾ N. W. McLachlan: Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences. Oxford 1950, S. 54.

Affine oder projektive Kinematik, eine prinzipielle Untersuchung zu den Grundlagen der Rheologie

Von *Heinrich Hencky* † in Mainz-Gustavsburg

Bei der Anwendung des Erlanger Programms auf die Mechanik handelt es sich um drei Transformationsgruppen, die metrische Gruppe der starren Bewegungen, die affine Gruppe, welche die unendlich ferne Ebene in sich transformiert und die projektive Gruppe, welche eine Ebene im Endlichen, die Fluchtebene, mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen läßt.

Vom mathematischen Gesichtspunkt aus gesehen, ist die Mechanik eine Differentialgeometrie für ein noch von dem Zeitparameter abhängiges dreidimensionales Euklidisches Kontinuum. Dabei kommt es, wie S. Lie bereits gezeigt hat, nur auf die infinitesimalen Gruppen an, durch welche dann die Raumstruktur festgelegt wird.

Für die Massenpunktmechanik genügt die affine Gruppe, welche zwar auch Verformungen bewirkt, aber mathematisch am zweckmäßigsten ist, weil die Drehungen ja schon durch eine Spezialisierung der affinen Matrix bedingt sind. Man kann also auch starre Körperchen in ihrem kinematischen Verhalten mittels der affinen Technik transformieren, wobei man die notwendigen sechs Freiheitsgrade zur Verfügung hat. Wendet man aber die affine Technik auf das Element eines verformbaren Kontinuums an, so hat man in der infinitesimalen Transformationsmatrix nur die Ableitungen des Verschiebungsvektors zur Verfügung, was einen Verlust von drei Freiheitsgraden im Infinitesimalen bedeutet.

Es ist aber absurd, eine Mechanik aufzubauen, bei der durch eine Erweichung der Starrheit ein Verlust von Freiheitsgraden erfolgt. Für den Physiker hat die Vorstellung eines Punkttransports ohnehin etwas Abwegiges. Transportieren können wir nur ein kleines Teilchen, und dabei wird dieses Teilchen auch unwillkürlich gedreht und verdrückt. Als Grundlage der Verformung wird man daher eine Transformation wählen, welche gleich unsere Grundfigur in der allgemeinst möglichen Weise verwandelt, und das kann nur die projektive Hauptgruppe. Unsere Grundfigur besteht aber aus dem infinitesimalen Koordinatenparallelepiped von acht Punkten. Nur durch die projektive Verformung können die acht Punkte des Parallelepipeds die allgemeinst mögliche Lage bekommen, die affine Gruppe würde nur ein schiefes Parallelepiped daraus machen. Die projektive infinitesimale Verformung ist nun gegeben durch den infinitesimalen Verschiebungsvektor und die Lage der Fluchtebene zum jeweiligen Aufpunkt.

Der Unterschied einer affinen und einer projektiven Verformung des Kontinuums läßt sich in folgender Weise charakterisieren:

Bei der affinen Verformung ist die Drehung des Teilchens durch die Ableitungen des Verschiebungsvektors schon mitbestimmt, die Feldrotation also mit der individuellen Drehung des Elements identisch. Bei der projektiven Verformung dagegen besteht im allgemeinen ein Unterschied zwischen der Feldrotation und der Teilchendrehung. Das gleiche gilt auch für die reinen Verformungen.

Der Zusammenhang zwischen Feld und Teilchen ist also im Kontinuum des Euklidischen Raumes loser als im affinen Raum, in dem das Teilchen sofort drei seiner Freiheitsgrade verliert.

Zur Gewinnung einer wirklichkeitsgemäßen Dynamik der Kontinua muß daher die bisher übliche affine Kinematik durch die Kinematik der Hauptgruppe ersetzt werden.

Ein nichtkonserviertes Stabilitätsproblem

Von *Hans Ziegler* in Zürich

Ein fester elastischer Körper ist dann und nur dann stabil, wenn er sich unter dem Einfluß genügend kleiner Störungen beliebig wenig aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, also eine beliebig schwache Schwingung um diese ausführt.

Sind die inneren und äußeren Kräfte konservativ, so existiert eine potentielle Energie. Der Körper ist in diesem Falle so lange stabil, als diese positiv definit ist, und eine allfällig vorhandene kritische Belastung ist die kleinste Last, unter der dies nicht mehr zutrifft.

Da die potentielle Energie mit dem Auftreten nichttrivialer Gleichgewichtslagen aufhört, positiv definit zu sein, kann die kritische Belastung auch als diejenige ermittelt werden, unter der erstmals eine nichttriviale Gleichgewichtslage existiert.

Von diesen drei Stabilitätskriterien — dem kinetischen, dem energetischen und dem statischen — sind die beiden letzten an die Voraussetzung gebunden, daß neben den inneren auch die äußeren Kräfte konservativ seien. Trifft dies nicht zu, so muß auf das kinetische Kriterium zurückgegriffen, d.h. eine Schwingungsaufgabe gelöst werden.

Es ist leicht einzusehen, daß das Kräftepaar mit konstantem Momentvektor nichtkonservativ ist. Das Stabilitätsproblem der dünnen Welle, welche durch axiale Endmomente belastet und damit auf Torsion beansprucht ist, ist daher — gleichgültig, ob man sich für das kritische Torsionsmoment oder für die kritische Drehzahl interessiert — im allgemeinen nichtkonservativ. In der Tat gelingt es nur in Ausnahmefällen, die Arbeit dieser Momente bei einer virtuellen Deformation als Variation eines Integrals darzustellen.

Ist die Welle beidseitig eingespannt, so existiert ein solches Integral, und in der Tat ist hier das Moment konservativ. Die Anwendung des statischen Stabilitätskriteriums ist daher noch gestattet, und dieses führt beim Knickproblem auf die Greenhillsche¹⁾ Formel $W = \frac{4\pi\alpha}{l}$, in der W das kritische Torsionsmoment, α die Biegesteifigkeit und l die Länge der Welle darstellt.

Bei der einseitig eingespannten Welle versagen die beiden ersten Kriterien, da das Moment nichtkonservativ ist; insbesondere gibt es hier keine nichttriviale Gleichgewichtslage. Die Schwingungsrechnung liefert für das kritische Moment den unerwarteten Wert $W=0$ ²⁾.

Auch bei der beidseitig gelenkig gelagerten Welle ist das Moment nichtkonservativ, und die Schwingungsrechnung zeigt, daß ein kleines Torsionsmoment auf die Querschwingungen ohne Einfluß ist. Es kann daher vermutet werden, daß hier die Greenhillsche Formel $W = \frac{2\pi\alpha}{l}$ samt ihren Erweiterungen, die R.Grammel³⁾ zu verdanken sind, zu Recht bestehen.

Läßt man die Welle gleichförmig um ihre Achse rotieren, so erhält man durch Zufügen der Trägheitskräfte aus der Knickaufgabe ein Drehzahlproblem, das im allgemeinen wieder als Schwingungsaufgabe behandelt werden muß. Dabei stellt sich beispielsweise im Falle der fliegenden Welle — wie auf Grund des Ergebnisses beim Knickproblem zu erwarten ist — heraus, daß für $W \neq 0$ jede Drehzahl kritisch ist.

Die Resultate dieser Untersuchungen, die in der ZAMP ausführlich dargestellt werden sollen, decken sich — wenigstens was die Labilität der fliegenden Welle anbelangt — schlecht mit der Erfahrung. Sie beruhen aber auf der üblichen Voraussetzung einer ideal schlanken Welle und zudem auf der Vernachlässigung der Dämpfung. Da der Knickvorgang hier nicht wie im Eulerschen Falle in einem ebenen, monotonen Ausweichen der elastischen Linie besteht, sondern den Charakter eines Schwingungsvorgangs hat, bei dem sich die Stabelemente auf spiralförmigen Bahnen allmählich von ihrer Ausgangslage entfernen, ist nämlich auch mit einer Beeinflussung der Stabilität durch die Dämpfung zu rechnen.

Jedenfalls zeigen die Ergebnisse, daß selbst ganz einfache Aufgaben nichtkonservativ sein und daß sie, falls sie als Stabilitätsprobleme auftreten, nicht mit den üblichen Stabilitätskriterien behandelt werden können.

Zwei Bemerkungen zur allgemeinen Frage der klassischen Elastizitätstheorie

Von Georg Hamel in Landshut (Bayern)

I. Z_x, Z_y, Z_z von z unabhängig bei verschwindender Raumkraft verlangt nach den statischen Gleichungen:

1. eine Airysche Spannungsfunktion $A(x, y, z)$, so daß

$$X_x = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

2. eine Funktion $B(x, y)$, so daß

$$Z_x = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad Z_y = -\frac{\partial B}{\partial x},$$

3. $Z_z = Z_z(x, y)$.

Indem man damit in die sechs Kompatibilitätsgleichungen hineingeht, bekommt man sechs Gleichungen für A, B, Z_z , die sich vollständig lösen lassen. Es werden

$$A = -\frac{1}{\sigma} z^3 \frac{\sigma}{1+\sigma} l_1 + \frac{1}{2} z^2 \left[\frac{1-\sigma}{\sigma} l_2 - \frac{c_2}{2\sigma} (x^2 + y^2) + \frac{1}{1+\sigma} k \right] + z A_1 + A_0,$$

¹⁾ A. G. Greenhill: On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust. Proc. Inst. Mech. Eng. (1883), S. 182.

²⁾ Herr Grammel hat dieses Ergebnis vor einer Reihe von Jahren auf anderem Wege erhalten, aber nicht publiziert.

³⁾ Vgl. C. B. Biezeno und R. Grammel: Techn. Dynamik, Berlin 1939, S. 538ff.

wobei l_1 und k harmonisch in x und y sind, $\Delta l_2 = c_2$, $\Delta A_1 = l_1$, $\Delta A_0 = l_2$, $Z_z = -k + \frac{1}{\sigma} l_2$ und $(1 + \sigma) B + i l_2$ eine analytische Funktion ist.

Die zugehörigen Verschiebungen lassen sich ausrechnen, es ist dazu nützlich, eine allgemeine biharmonische Funktion $B = (G_1 + x F_1 + y F_2)$ einzuführen, wobei $F_1 + i F_2$ und $G_1 + i G_2$ analytische Funktionen von $x + i y$ sind, worauf dann

$$l_1 = 4(1 + \sigma) \frac{\partial F_2}{\partial x} + \text{const} \quad \text{wird und} \quad \frac{1}{4} \left[\Delta B + \frac{i}{1 + \sigma} (\Delta A_1 + \text{const}) \right] = \frac{d}{d(x + i y)} (F_1 + i F_2).$$

II. Die statischen Gleichungen lassen sich bekanntlich im dreidimensionalen Fall bei $p = -\frac{d\Omega}{dw}$ durch

$$X_x = \Omega + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}, \quad Y_y = \Omega + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad Z_z = \Omega + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad X_z = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}, \quad Y_x = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

lösen.

Setzt man $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\psi = \varphi_2 + \varphi_3$, $\chi = \varphi_3 + \varphi_1$, so lassen sich aus der zweiten Zeile die Verschiebungen u, v, w berechnen und zwar zu

$$\mu u = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (g + h), \quad \mu v = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (f + h), \quad \mu w = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (f - g),$$

wo $f = f(y, z)$, $g = g(z, x)$, $h = h(x, y)$ willkürlich sind.

Dies sind die Integrale von

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x \partial y} \quad \text{usw.}$$

Setzt man das in die drei ersten Gleichungen ein, so bekommt man drei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ z. B.

$$\Delta \varphi_1 + \Omega + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} \right) = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial U}{\partial x},$$

wo

$$U = \frac{\partial}{\partial x} (g + h), \quad V = -\frac{\partial}{\partial y} (f + h), \quad W = \frac{\partial}{\partial z} (f - g).$$

Über eine integrable, nicht-lineare Elastizitätstheorie

von H. Neuber in Dresden

Die technische Festigkeitslehre ist — von wenigen Ausnahmen abgesehen — bei der Berechnung der Spannungsverteilung in Bau- und Maschinenteilen seither auf die lineare Elastizitätstheorie angewiesen, welche dem Hookeschen Gesetz entspricht. Die so erzielbaren Ergebnisse haben zur Aufstellung von Formeln geführt, aus denen der Konstrukteur die an der Stelle der höchsten Beanspruchung auftretenden Spannungswerte errechnet und unter Bezugnahme auf eine Festigkeitshypothese mit den Festigkeitskennwerten des Werkstoffes vergleicht. Hierbei ergeben sich zunächst insofern Schwierigkeiten, als die genaue Berücksichtigung der Oberflächenform mathematisch nur in wenigen Fällen gelungen ist¹⁾. Jedoch konnte durch Einschaltung geeigneter Interpolationsformeln Abhilfe geschaffen werden²⁾. Bei schwacher Krümmung der Oberfläche schien ein solches Errechnungsverfahren bereits weitgehend brauchbar zu sein, bei stärkerer Oberflächenkrümmung jedoch machte sich ein zu starkes Anwachsen der theoretischen Spannungswerte bemerkbar, da die dem Hookeschen Gesetz entsprechende Elastizitätstheorie für Spitzkerben unendlich hohe Spannungswerte liefert. Wenn auch vom physikalischen Standpunkte aus im atomaren Bereich außerordentlich hohe Spannungen zu erwarten sind, ist ihre Ermittlung für den Ingenieur indiskutabel, da er es mit technischen Werkstoffen zu tun hat und auf den Vergleich mit dem Zugversuch angewiesen ist, bei dem nur eine mittlere Spannung des Querschnittes bestimmt wird. Durch Einführung eines endlichen Gefügeteilchens konnte der Vf. diese Diskrepanz in erster Näherung überbrücken³⁾. Damit war jedoch noch nicht das Verhalten des Werkstoffes in der Nähe der Fließgrenze berücksichtigt, das ja

1) 2) 3) H. Neuber: Kerbspannungslehre 1937.

gerade bei Kerbwirkung in Betracht zu ziehen ist. Bei zähem Werkstoff ist in Wirklichkeit die Sicherheit gegenüber der Zerstörung weitaus größer, als die in der statischen Berechnung auftretende Sicherheitszahl erwarten läßt, welche auf Vergleichswerten beruht, die aus dem Hookeschen Gesetz errechnet sind. Durch den Werkstoffmechanismus wird von selbst ein teilweiser Abbau der Spannungsspitzen und zugleich eine stärkere Belastung der ursprünglich geringer beanspruchten Fasern herbeigeführt („Schlauheit des Materials“). Die Forderung nach stärkerer Ausnützung der Werkstoffe und die Verantwortung für die Sicherheit der Bauteile verlangt daher eine eingehende Erforschung des Beanspruchungsvorganges bei höheren Laststufen, insbesondere in der Nähe der Fließgrenze. Zur Klärung dieser Frage wurden zunächst umfangreiche mathematische Untersuchungen durchgeführt, welche zeigten, daß einer erfolgreichen Lösung dieses Problems erhebliche Schwierigkeiten gegenüberstehen. Für einen besonderen Fall zweidimensionaler Spannungsprobleme gelang dem Vf. jedoch die Aufstellung einer integrierbaren, nicht-linearen Elastizitätstheorie, welche zur Berücksichtigung des Einflusses der Oberflächenform einerseits und der Spannungsdehnungskurve zäher Werkstoffe andererseits geeignet ist und bereits zu fruchtbaren Ergebnissen geführt hat. Die Grundgedanken dieser Theorie lassen eine Analogie zu Problemen der Gasdynamik und der Flächentheorie erkennen. Es ergibt sich eine Differentialgleichung, deren Lösungen durch Überlagerung von zwei konformen Abbildungen darstellbar sind.

Über eine Möglichkeit zur Kontrolle der physikalischen Widerspruchsfreiheit der Gleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie¹⁾

Von G. Fichera in Rom

Wir betrachten in einem r -dimensionalen euklidischen Raum S_r ein beschränktes Gebiet D (offene Punktmenge). Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß die Grenze B von D aus einer einzigen geschlossenen Oberfläche der Klasse 2 besteht, d. h. lokal abbildbar ist mit Hilfe stetiger und mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehener Funktionen. Sei $u(x)$ ein Vektor mit r Komponenten, die wir mit $u_1(x), u_2(x), \dots, u_r(x)$ bezeichnen. Mit $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ bezeichnen wir den in S_r variablen Punkt.

Wir setzen

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \quad \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^r \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad \operatorname{grad} u_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \right).$$

Wir betrachten in D die folgende Vektorgleichung

$$\Delta_2 u + \kappa \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f \quad \dots \quad (1).$$

κ ist eine bestimmte Konstante und f ein gegebener in D definierter Vektor. Wir werden auch den auf B definierten Differentialoperator betrachten, der den Vektor u in den Vektor $L(u)$ mit den folgenden r Komponenten überführt

$$L_i[u] = \frac{du_i}{dv} + (\kappa - \lambda) \operatorname{div} u v_i + \lambda \sum_{j=1}^r \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j.$$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ ist der zu B normale Versor, der nach dem Innern von D gerichtet ist. d/dv bedeutet die Differenzierung in Richtung der inneren Normalen von D . λ ist eine bestimmte Konstante.

Wir zerlegen B in zwei offene Hyperflächen B_1 und B_2 . Das Problem, mit dem wir uns beschäftigen werden, betrifft die Integration der Gleichung (1), wobei der Vektor u auf B_1 und der Vektor $L[u]$ auf B_2 vorgeschrieben ist. Im Spezialfall $\kappa = \lambda = 0$ erhält man das wohlbekannte gemischte Problem von Dirichlet-Neumann für die Gleichung von Laplace. Dieses Problem ist, wie wohlbekannt, für $r = 2$ äquivalent jenem, das darin besteht, eine in D holomorphe Funktion zu bestimmen, deren Realteil auf B_1 und deren Imaginärteil auf B_2 vorgeschrieben ist. Wenn man annimmt, daß $r = 3$, $\kappa > 1$, $\lambda = 1$ befindet man sich im Fall des fundamentalen Problems der mathematischen Theorie der Elastostatik, d. h. des Problems des Gleichgewichts eines isotropen und homogenen elastischen Körpers, der auf einem Teil seines Randes vorgeschriebenen Bindungen unterworfen ist sowie der Wirkung eines bekannten Systems von Massenkraften in D und von Oberflächenkräften auf B_2 unterliegt. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir $u = 0$ auf B_1 , $f = 0$ in D voraussetzen. Wir werden übrigens mit \mathfrak{L} den auf B_2 vorgeschriebenen Vektor $L[u]$ bezeichnen.

¹⁾ Vorliegende Arbeit wurde im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Rom ausgeführt.

Um ein Eindeutigkeitstheorem zu sichern, werden wir voraussetzen, daß $\kappa > -1$, $-1 < \lambda < \gamma(\kappa, r)$, wobei $\gamma(\kappa, r)$ die kleinere der beiden Zahlen 1 und $\frac{r\kappa + 1}{r-1}$ ist, oder auch $\kappa > 1$, $\lambda = 1$. In beiden Fällen ist es möglich, in D einen Vektor $I[u]$ mit μ_r Komponenten $I_1[u]$, $I_2[u]$, \dots , $I_{\mu_r}[u]$ zu definieren, die Linearkombinationen der ersten Ableitungen der Komponenten von u sind, in der Weise, daß die folgende Formel besteht

$$\int_B \{u \cdot L[v]\} d\sigma + \int_D \{I[u] \cdot I[v]\} dx = 0.$$

u ist ein Vektor, der der Klasse U aller Vektoren angehört, die stetige und mit in D integrierbarer Norm versehene erste Ableitungen besitzen. v gehört der Klasse jener Vektoren an, die mit ihren ersten Ableitungen in $D + B$ stetig sind und in D der Gleichung genügen

$$\Delta_2 u + \kappa \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \quad (1^0).$$

Wir werden weiterhin die Unterklasse U_0 von U betrachten, die aus den Vektoren von U besteht, die auf B_1 verschwinden und Lösungen von (1^0) sind.

Es ist möglich, ein Existenz- und Eindeutigkeitstheorem in der Klasse U_0 für das gegebene Problem aufzustellen²⁾.

Der erste Schritt des Beweises besteht darin, zu zeigen, daß die Klasse U_0 angesehen werden kann als ein linearer, normaler und vollständiger Funktionenraum im Sinne der allgemeinen Analysis. Das wird möglich, indem man die Funktionalnorm eines Vektors u in U_0 in folgender Weise definiert

$$||u|| = \left[\int_D |I[u]|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Der zweite Schritt besteht im Beweis der Existenz in U_0 eines orthonormalen und vollständigen Systems $\{v^{(n)}\}$, wobei $v^{(n)}$ ein in $D + B$ mit stetigen ersten Ableitungen versehener Vektor ist. Jeder Vektor u von U_0 kann dann in folgender Weise in eine im Innern von D gleichmäßig konvergente Reihe entwickelt werden

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v^{(n)}, \quad c_n = \int_D \{I[u] \cdot I[v^{(n)}]\} dx \quad (2).$$

Die Eindeutigkeit der Lösung in U_0 folgt leicht aus der Bemerkung, daß

$$c_n = \int_D \{I[u] \cdot I[v^{(n)}]\} dx = - \int_B (v^{(n)} \cdot \mathfrak{L}) d\sigma = 0,$$

wenn $\mathfrak{L} \equiv 0$ auf B_2 .

Wenn umgekehrt der Vektor \mathfrak{L} gegeben ist und

$$c_n = - \int_B (v^{(n)} \cdot \mathfrak{L}) d\sigma$$

gesetzt wird, beweist man unter der mehr als hinreichenden Bedingung, daß \mathfrak{L} auf B_2 stetig ist und hier eine Höldersche Bedingung erfüllt, daß die Reihe (2) die Lösung des Problems definiert, und in dieser Weise gelangt man zum Existenztheorem.

Das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem, das wir skizziert haben, sichert, daß die erhaltene Lösung folgende Bedingung erfüllt

$$\int_B |I[u]|^2 dx < +\infty.$$

Im Falle der Elastizität ($r = 3$, $\kappa > 1$, $\lambda = 1$) wird diese Bedingung von der physikalischen Natur des Problems erfordert. Sie drückt in der Tat aus, daß die Deformationsenergie endlich ist. Aber von diesem Standpunkt wird weiterhin die Stetigkeit des Vektors u und seiner ersten Ableitungen in $D + B$ erfordert. Es ist möglich, anhand von Beispielen zu zeigen, daß die bloße Stetigkeit oder Differenzierbarkeit beliebig hoher Ordnung des auf B_2 gegebenen \mathfrak{L} nicht die Stetigkeit der Ableitungen u in $D + B$ nach sich zieht. Es ergibt sich daher die Notwendigkeit einer weiteren Untersuchung über die Bedingungen, denen \mathfrak{L} genügen muß, um diese Stetigkeit zu sichern.

An einem Spezialfall werden wir den überraschenden Umstand beleuchten, nach dem für die Stetigkeit in $D + B$ der ersten Ableitungen von u notwendig ist, daß der gegebene Vektor \mathfrak{L} eine quantitative Bedingung folgenden Typs erfüllt

$$\int_{B_2} (\tau \cdot \mathfrak{L}) d\sigma = 0 \quad (3),$$

wobei τ ein Vektor ist, der ausschließlich vom Gebiet D abhängt. Setzen wir $r = 2$, $\kappa = \lambda = 0$, d. h. betrachten wir den Fall des gemischten Problems von Dirichlet-Neumann für

²⁾ Vgl. G. Fichera, Sull'estistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico. Ann. della Scuola Normale di Pisa 1950.

die harmonischen Funktionen in zwei unabhängigen Veränderlichen. Die Grenze B ist in zwei offene Kurven B_1 und B_2 zerlegt, die als gemeinsame Endpunkte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ haben. Man betrachtet die beschränkte harmonische Funktion v , die auf B_1 den Wert $\pi/2$ und auf B_2 den Wert 0 annimmt. Es ist bekannt, daß eine solche Funktion in folgender Weise zerlegbar ist:

$$v(x) = w(x) - \frac{1}{2} \Theta_1(x) + \frac{1}{2} \Theta_2(x).$$

$\Theta_1(x)$ ist der Winkel (zwischen 0 und 2π), den \vec{x}_1 mit der positiven Tangentenachse an B in x_1 bildet, und in analoger Weise wird $\Theta_2(x)$ definiert; $w(x)$ ist eine harmonische und stetige Funktion in $D + B$, und man stellt fest, daß ihre Konjugierte ω eine stetige Funktion in $D + B$ ist.

Wir setzen

$$u = \omega - \frac{1}{2} \log |x_1 - x| + \frac{1}{2} \log |x_2 - x|,$$

$$\alpha(x) = e^u \cos v = \frac{|x_2 - x|^{1/2}}{|x_1 - x|^{1/2}} e^\omega \cos v,$$

$$\beta(x) = e^u \sin v = \frac{|x_2 - x|^{1/2}}{|x_1 - x|^{1/2}} e^\omega \sin v.$$

Sei C eine einfache reguläre geschlossene Kurve im Innern von D . Man hat

$$\int_C \left(\alpha \frac{du}{dn} - u \frac{d\alpha}{dn} \right) ds = \int_C \left(\alpha \frac{du}{ds} + \beta \frac{d\alpha}{ds} \right) ds = 0.$$

Setzt man die ersten Ableitungen von u als stetig in $D + B$ voraus und läßt man die Kurve C gegen B streben, so erhält man

$$\int_{B_2} \left(\frac{|x_2 - x|^{1/2}}{|x_1 - x|^{1/2}} \right) e^\omega \mathfrak{L} ds = 0 \quad \dots \dots \dots (4).$$

Z. B. wenn B der Kreis $x = \cos \Theta$, $y = \sin \Theta$ und B_2 der Halbkreis $\pi \leq \Theta \leq 2\pi$ ist, wobei in diesem Fall $\omega = 0$ wird, hat man

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left| \frac{|x_2 - x|}{|x_1 - x|} \right|^{1/2} \mathfrak{L}(\Theta) d\Theta = 0 \quad \dots \dots \dots (4').$$

Im allgemeinen Fall kann man berechtigterweise erwarten, daß eine Bedingung des Typs (3) besteht. In der Tat ist es möglich, die theoretische Existenz eines Vektors α zu beweisen, dessen Komponenten r additive Funktionen mit endlicher Variation der Borel'schen Mengen von B_2 sind, so daß für die Stetigkeit in $D + B$ der Derivierten von u die folgende Bedingung notwendig ist:

$$\int_{B_2} \mathfrak{L} \cdot d\alpha = 0 \quad \dots \dots \dots (5).$$

Das Integral in (5) ist ein Integral im Sinne von Stieltjes. Es ist ein Problem der mathematischen Physik, die Bedingungen (4), (4'), (5) physikalisch zu interpretieren.

Wenn man beweisen kann, daß derartige Bedingungen keinerlei physikalischen Sinn besitzen, muß man schließen, daß die mathematische Schematisierung jener physikalischen Probleme, auf welche sich jene Bedingungen beziehen, — insbesondere des Problems des elastischen Gleichgewichts — illusorisch sind.

Zum Elastizitätsproblem des kreiszylindrischen Flüssigkeitsbehälters veränderlicher Wandstärke

Von Karl Federhofer in Graz

Die Lösung des Elastizitätsproblems des kreiszylindrischen Flüssigkeitsbehälters mit stetig veränderlicher Wandstärke erfordert die Integration einer linearen Differentialgleichung 4. Ordnung für die radiale Verschiebung der Punkte der Mittelfläche; sie besitzt veränderliche Koeffizienten, die durch das Gesetz der Wandstärkenänderung bestimmt sind. Geschlossene Lösungen durch bekannte Funktionen sind für konstante und linear veränderliche Wanddicke δ bekannt; es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß im Falle einer quadratischen Veränderlichkeit

von δ das Problem durch elementare Funktionen gelöst werden kann.¹⁾ Wählt man nämlich als Grundveränderliche die Schubkraft Q und die Veränderliche $V = \chi \delta^2$, wo χ den Biegewinkel der Zylindererzeugenden bedeutet, so genügen Q und V mit Einführung des Operators

$$L(\dots) = \delta(\dots)^{\text{II}} - \delta^{\text{I}}(\dots)^{\text{I}}$$

den Differentialgleichungen

$$L(Q) + \frac{E}{a^2} V = \left(p^{\text{I}} - \frac{\delta}{\delta} p \right) \delta, \quad L(V) - 2 \delta^{\text{II}} V = \frac{12(1-\nu^2)}{E} Q.$$

($p = \gamma x$ = Druck der Füllflüssigkeit in der Tiefe x unter dem oberen Rande.) Hochgestellte Zahlen bedeuten Ableitungen nach x . Das homogene Gleichungssystem für Q und V lautet dann:

$$LL(Q) - 2 \delta^{\text{II}} L(Q) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2} Q = 0, \quad LL(V) - L(2 \delta^{\text{II}} V) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2} V = 0.$$

Die Aufspaltung der Gleichungen 4. Ordnung in solche 2. Ordnung von der Form

$$L(Q) + c Q = 0 \quad (c = \text{const}) \quad \dots \quad (1)$$

liefert die Aufspaltungsbedingung

$$c^2 + 2 \delta^{\text{II}} c + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2} = 0,$$

wonach δ^{II} gleich sein muß einer beliebig wählbaren Konstanten k . Aus $\delta^{\text{II}} = k$ folgt für das Wandstärkengesetz

$$\delta(x) = \frac{k}{2} x^2 + b_1 x + b_2 \quad \dots \quad (2).$$

Die Konstanten k, b_1, b_2 sind bestimmt durch die Werte von δ am oberen und unteren Behälterrande und durch die noch freie Wahl der Lage der zur Zylinderachse parallelen Scheiteltangente der nach (2) parabolischen Wandbegrenzung.

Mit dem Wandstärkengesetz (2), das die Fälle konstanter und linear veränderlicher Wandstärke als Sonderfälle enthält, läßt sich (1) bei beliebiger Lage der Scheiteltangente überführen in eine hypergeometrische Differentialgleichung. Verlegt man aber die Scheiteltangente der Wandbegrenzung in die Mittelfläche der Zylinderschale, was bei der Annahme $2kb_2 = b_1^2$ zutrifft, dann vereinfacht sich die Gl. (1) in eine gewöhnliche Eulersche Gleichung, die durch einfache Potenzfunktionen von x in geschlossener Form integriert werden kann, so daß auch Biegemoment, Querkraft und Formänderung des Behälters durch geschlossene Ausdrücke ebenso einfach wie im Falle konstanter Wandstärke dargestellt werden können.

Eine ausführliche Darstellung ist kürzlich erschienen im Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österr. Akad. d. Wiss., Jg. 1950, S. 275—287. Über numerische Ergebnisse für Behälter verschiedener charakteristischer Kennzahlen soll im Bd. V (1951) des Österr. Ing.-Arch. berichtet werden.

Die mehrfach durchlochte Platte

Von C. B. Biezeno in Delft

Einer Aufforderung der Tagungsleitung befolgend gibt der Redner eine Übersicht über die letzten Arbeiten seines während des Krieges ums Leben gebrachten Mitarbeiters Dr. ir. K. J. Schulz. Sie beziehen sich auf die durchlochte Platte und behandeln in einheitlicher Weise, und zwar mittels eines Iterationsverfahrens eine ganze Reihe alter und neuer Probleme, welche unter Verweis auf die Originalabhandlungen hier nur in aller Kürze aufgezählt werden: die einfach durchlochte Platte, die zweifach durchlochte Platte, die Platte mit einer unendlichen Reihe kollinearer Löcher, die Platte mit drei nicht kollinearen Löchern, die Platte mit zwei parallelen (unendlichen) Reihen von Löchern (welche auch gegeneinander verschoben sein können), Platten, bei denen die Lochränder in vorgeschriebener Weise belastet sind, die Halbplatte mit einer unendlichen Reihe von Löchern parallel zu ihrem freien Rand, der unendliche Streifen endlicher Breite mit einer unendlichen Reihe von Löchern, entweder auf einfachem Zug oder auf reiner Biegung beansprucht.

Siehe die Originalarbeiten:

K. J. Schulz: Over de spanningstoestand in doorboorde platen. Diss. 1941, Delft; On the State of Stress in Perforated Plates, Proc. Kon. Ak. v. Wet. A'dam XLV, (1942), S. 232—239, 341—346, 457—464, 524—532; ferner: XLVIII (1945), S. 282—291 und 292—298.

¹⁾ Zu obiger Feststellung, und zwar erweitert auf die anisotrope Zylinderschale, gelangte bereits, wie ich erst nachträglich bemerkte, E. Steuermann: Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 463 auf Grund einer von der hier benutzten Meißnerschen Methode abweichenden Beweisführung. Eine bis zur numerischen Durchrechnung reichende Lösung des Problems des Flüssigkeitsbehälters mit quadratisch veränderlicher Wandstärke ist dagegen in der erwähnten Arbeit nicht gegeben.

Zur Spannungsfunktion bei Membranschalen

Von *W. Zerna* in Hannover

Die Schalenmittelfläche F möge durch allgemeine Flächenkoordinaten ϑ_1, ϑ_2 bestimmt sein. Mittels einer Parallelprojektion werde das auf F gelegene Koordinatennetz auf eine zu den Projektionsstrahlen senkrecht gelegenen Ebene E projiziert gedacht, so daß das Kurvennetz auf F als Bild auf E erscheint. Jedem Punkt auf F ist damit ein Punkt auf E zugeordnet. Es werde vorausgesetzt, daß diese Zuordnung ein-eindeutig ist. Die auf den Projektionsstrahlen gemessene Entfernung der einander entsprechenden Punkte sei $z = z(\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Das Gleichgewicht des in E gelegenen Bildes eines Flächenelementes läßt sich ausdrücken durch¹⁾

$$n^{\alpha\beta}|_{\alpha} + p^{\beta} = 0 \quad \dots \quad (1).$$

Darin ist p^{β} durch die Schalenbelastung gegeben und $n^{\alpha\beta}$ ist ein in E gelegener kontravarianter Tensor, der mit dem in F gelegenen Längskraftensor $N^{\alpha\beta}$ verbunden ist durch

$$n^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{a}{h}} N^{\alpha\beta},$$

worin a und h die Determinanten des Maßtensors in F und E sind.

Da $n^{\alpha\beta}$ ein Tensor des euklidischen Raumes ist, sind die höheren kovarianten Ableitungen vertauschbar und (1) läßt sich durch den Ansatz

$$n^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\mu} \varepsilon^{\beta\nu} \Theta|_{\mu\nu} - A^{\alpha\beta} \quad \dots \quad (2)$$

identisch befriedigen. In (2) stellt Θ eine Spannungsfunktion dar.

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad \text{und} \quad A^{\alpha\beta}|_{\alpha} = p^{\beta}, \quad \text{wobei} \quad A^{12} = A^{21} = 0$$

gewählt werden kann.

Zur Ermittlung der Spannungsfunktion steht die dritte Gleichgewichtsbedingung der Schalentheorie zur Verfügung, die in diesem Fall

$$n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \sqrt{\frac{a}{h}} (p^3 - p^{\lambda} z|_{\lambda}) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

lautet, worin p^3 der Lastkomponente senkrecht zu E entspricht, und $b_{\alpha\beta}$ sind die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform von F .

Einführung von (2) und (3) ergibt die Differentialgleichung für die Spannungsfunktion, sie lautet

$$\varepsilon^{\alpha\mu} \varepsilon^{\beta\nu} b_{\alpha\beta} \Theta|_{\mu\nu} - q \quad \dots \quad (4),$$

mit

$$q = b_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} - \sqrt{\frac{a}{h}} (p^3 - p^{\lambda} z|_{\lambda}).$$

Ist das Koordinatensystem in E kartesisch, so gehen die kovarianten Ableitungen in (4) in die gewöhnlichen partiellen über. Die sich dann ergebende Gleichung ist in anderer Form und auf anderem Wege von Pucher²⁾ gefunden worden. Hier zeigt sich die Überlegenheit des Tensorkalküls, der es gestattet, die allgemeinen Beziehungen sofort mühelos zu gewinnen.

Berechnung der Druckverteilung eines belasteten Balkens auf elastischem Untergrund

Von *Th. Schade* in Aachen

1. Einleitung

Die vorliegende Methode weist einen Weg, das Problem des belasteten Balkens auf einem elastischen Untergrund mit allen Randbedingungen und physikalischen Bedingungen näherungsweise zu lösen. Dabei wird ein „Bettungsmodul“ definiert, der sich aus physikalischen und geometrisch bekannten Größen zusammensetzt und nicht durch Versuche ermittelt werden muß. Die Formulierung des Problems als lineare Integralgleichung gestattet dabei die Anwendung des Superpositionsprinzips der Fertigungslehre.

¹⁾ Die Indizes durchlaufen die Zahlen 1, 2, über doppelt auftretende gleiche Indizes ist zu summieren, der senkrechte Strich zeigt kovariante Differentiation an.

²⁾ A. Pucher: Beton u. Eisen 33 (1934), S. 298.

2. Analytische Grundlagen

Die Integralgleichung, die sich aus der Bedingung gleicher Durchbiegung von Balken und Untergrund in y -Richtung ergibt, lautet in dimensionslosen Koordinaten $x=a\xi$.

$$\int_{-1}^{+1} p(v) \ln |\xi - v| dv = -\frac{ba^3 E_E}{2 E_B I} \left\{ \int_{-1}^{\xi} d\xi \int_{-1}^{\xi} d\xi \int_{-1}^{\xi} (q(\xi) - p(\xi)) d\xi + c_0 + c_1 \xi + c_2 \frac{\xi^2}{2} + c_3 \frac{\xi^3}{6} \right\} \quad (1).$$

Wenn E_B der Elastizitätsmodul des Balkens, E_E der Elastizitätsmodul des Untergrundes, I das Trägheitsmoment des Balkens, b seine Breite und $2a$ seine Länge bedeutet; $q(\xi)$ bzw. $p(\xi)$ sind als Auflastfunktion bzw. Bodendruckfunktion in $[\text{kg}/\text{cm}^2]$ angegeben. Die Integrationskonstanten c_3 und c_2 werden aus der gegebenen Querkraft und Momentenbedingung an den Balkenenden bestimmt. c_1 ergibt sich aus dem Wert der ersten Ableitung in Balkenmitte. c_0 bleibt unbestimmt.

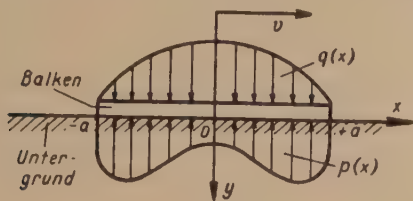


Bild 1

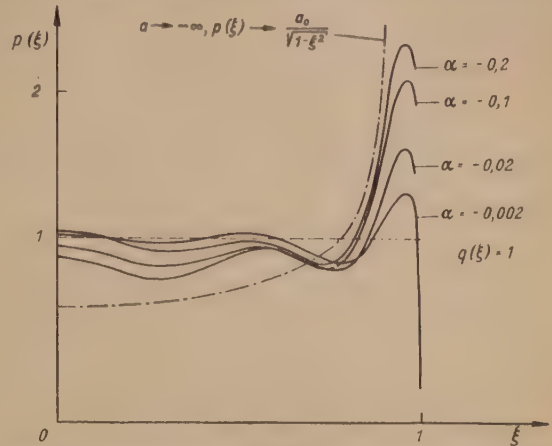


Bild 2. Bodendruckverteilung für gleichmäßige Auflastverteilung (Fall 1)

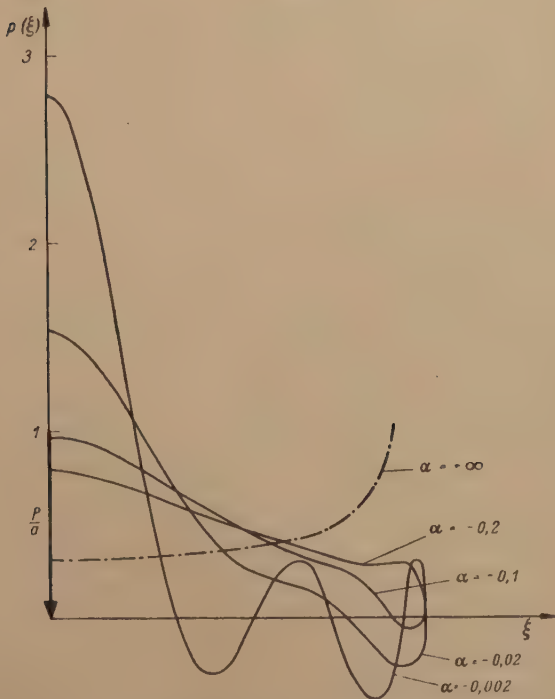


Bild 3. Bodendruckverteilung für eine Belastung durch eine Einzellast in Balkenmitte (Fall 3)

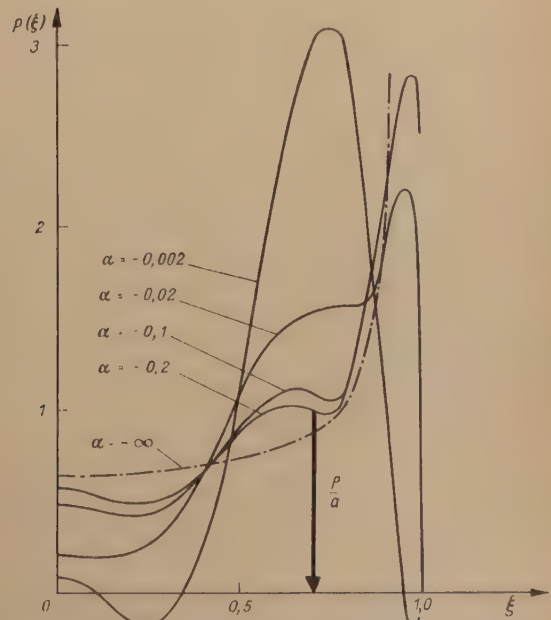


Bild 4. Bodendruckverteilung für eine Belastung von symmetrisch angeordnet und gleichen Einzelkräften für $a = 0,707a$ (Fall 4)

Setzt man $\xi = -\cos \varphi$, $v = -\cos \alpha$, schreibt für die rechte Seite der Integralgleichung $g(-\cos \varphi)$ und setzt für den Faktor der rechten Seite, den „Bettungsmodul“

$$\lambda = -\frac{ba^3 E_E}{2 E_B I} \quad (2),$$

so heißt die Hamelsche Lösung der Integralgleichung

$$p(\xi) = -\frac{\lambda}{\sin \varphi} \left(\frac{b_0}{\pi \sqrt{\pi \ln 2}} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu b_{\mu} \cos \mu \varphi \quad (3)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} g(-\cos \varphi) d\varphi, \quad b_{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} g(-\cos \varphi) \cos \mu \varphi d\varphi \quad \dots \quad (4).$$

Mit dem Lösungssatz

$$p(\xi) = \frac{1}{\sin \varphi} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu \varphi \quad \dots \quad (5)$$

werden die b_{μ} Linearkombinationen der a_{ν} . Setzt man (5) in (3) ein, so kann man mit der Gleichgewichtsbedingung

$$a_0 = \frac{-\lambda b_0}{\pi \sqrt{\pi} \ln 2} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} q(\xi) d\xi \quad \dots \quad (6)$$

und der Spannungsbedingung an den Balkenenden,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} = 0 \quad \dots \quad (7)$$

wenn man bei einem gewissen $\mu = N$ abbricht, mit der Methode der kleinsten Quadrate das damit entstehende Gleichungssystem für die Koeffizienten der Druckfunktion lösen. In den folgenden Bildern (Bild 2—4) sind die Druckverteilungen für einige Belastungsfälle ($N=10$) ausgerechnet. Dabei ist

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \dots \quad (8).$$

Es sei noch bemerkt, daß, wie man aus (1) erkennt, folgende Grenzkurven gelten:

$$\alpha \rightarrow 0 \quad p \rightarrow q, \quad \alpha \rightarrow \infty \quad p \rightarrow \frac{a_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Zum Problem der schiefen Platte

Von W. Swida in Karlsruhe

Das Problem der schiefen (parallelogrammförmigen) Platte hat eine praktische Bedeutung für den Stahlbetonbrückenbau, weil die meisten Brücken schief sind. Die Lösung dieser Aufgabe in schiefwinkligen Koordinaten ist in den Arbeiten von Favre¹⁾, Lardy²⁾ und Nielsen³⁾ angegeben worden.

Im folgenden werden die Grundlagen eines Näherungsverfahrens entwickelt, bei dem die Platte durch ein unsymmetrisches hexagonales Gewebe ersetzt wird.

Die Gleichgewichtsbedingung für einen beliebigen Maschenpunkt k lautet (Bild 1):

$$\operatorname{tg} \alpha (w_q - 2w_k + w_p) + \operatorname{tg} \beta (w_l - 2w_k + w_i) + \operatorname{tg} \gamma (w_r - 2w_k + w_o) + \frac{p\lambda_x^2}{S_1} \kappa = 0 \quad (1),$$

wobei

$$\kappa = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg} \beta + \frac{\sec^2 \beta}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\gamma) \right]$$

ist und w_k, w_i, w_l usw. die Durchbiegungen des Gewebes in den Maschenpunkten sind. Im Bild 1 sind R_i, R_l, R_q usw. die Spannkkräfte der Ersatzdrähte. Weiterhin ist S_1 die Beanspruchung der elastischen Haut je Längeneinheit.

Die siebengliedrigen Differenzengleichungen nach der Art der Gl. (1) müssen für jeden Punkt des Maschennetzes angeschrieben werden. Die Auflösung der Gleichungen liefert die Ordinaten der Verformungsfläche des elastischen Gewebes.

Wenn man nun die Verformungsfläche des elastischen Gewebes als Belastungsfläche für ein neues zweites Gewebe betrachtet, wenn man also die elastischen Gewichte $p_k = w_k$ an den

¹⁾ H. Favre: Schweiz. Bauztg. 120 (1942), S. 35. Abhandl. der Intern. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Zürich 1943/44, S. 91.

²⁾ P. Lardy: Schweiz. Bauztg. 67 (1949), Nr. 15.

³⁾ N. I. Nielsen: Skaevvinklede Plader, Kopenhagen, Danmark 1944. Akademiet for de Tekniske videnskaber.

Knotenpunkten eines Gewebes mit der spezifischen Beanspruchung S_2 anbringt¹⁾, so erhält man folgendes Gleichungssystem für die sieben benachbarten Punkte, i, k, l, o, p, q, r (Bild 2)

$$\begin{aligned} \lg \alpha (2z_k - z_l - z_p) + \lg \beta (2z_k - z_i - z_l) + \lg \gamma (2z_k - z_o - z_r) &= \frac{w_k \lambda_x^2}{S_2} \kappa, \\ \lg \alpha (2z_l - z_i - z_k) + \lg \beta (2z_l - z_o - z_r) + \lg \gamma (2z_l - z_i - z_p) &= \frac{w_l \lambda_x^2}{S_2} \kappa, \end{aligned}$$

usw. Dabei sind z die Ordinaten der Verformungsfläche des zweiten Gewebes. Ermittelt man die

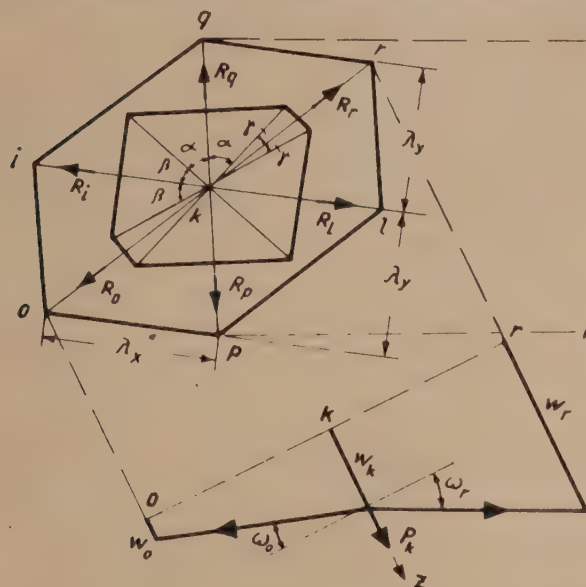


Bild 1

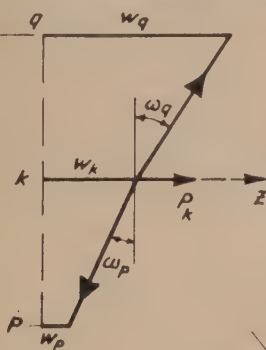


Bild 2

w -Werte aus diesen Gleichungen und setzt man sie in die Gl. (1), so erhält man folgende 19-gliedrige Differenzengleichung:

$$\left. \begin{aligned} z_k \cdot \delta_1 - (z_p + z_q) \delta_2 - (z_i + z_l) \delta_3 - (z_o + z_r) \delta_4 + 2 \lg \alpha \lg \beta (z_u + z_v) + 2 \lg \alpha \lg \gamma (z_m + z_n) \\ + 2 \lg \beta \lg \gamma (z_b + z_c) + \lg^2 \alpha (z_e + z_h) + \lg^2 \beta (z_s + z_t) + \lg^2 \gamma (z_j + z_l) = \frac{p \lambda_x^2 \kappa^2}{S_1 S_2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 4 (\lg \alpha + \lg \beta + \lg \gamma)^2 + 2 (\lg^2 \alpha + \lg^2 \beta + \lg^2 \gamma), \\ \delta_2 &= 4 \lg \alpha (\lg \alpha + \lg \beta + \lg \gamma) - 2 \lg \beta \cdot \lg \gamma, \\ \delta_3 &= 4 \lg \beta (\lg \alpha + \lg \beta + \lg \gamma) - 2 \lg \alpha \cdot \lg \gamma, \\ \delta_4 &= 4 \lg \gamma (\lg \alpha + \lg \beta + \lg \gamma) - 2 \lg \alpha \cdot \lg \beta. \end{aligned}$$

Aus (2) kann als Sonderfall die Gleichung von Göttlicher²⁾ für ein symmetrisches hexagonales Gewebe erhalten werden.

Die Ordinaten der Biegefläche der Platte werden $\zeta_k = z_k \cdot \frac{S_1 S_2}{D}$.

Die Ordinaten w und z verschwinden an den Rändern einer frei aufgelagerten Platte. Die Erfüllung der Randbedingungen für eine festeingespannte Platte bereitet einige Schwierigkeiten.

Über die physikalische Bedeutung der Mohrschen Hüllkurve

Von C. Torre in Wien

Otto Mohr [1] hat die Hüllkurve aller Grenzspannungskreise aus rein gedanklichen Erwägungen aufgestellt und ihren Verlauf als eine glatte Kurve schematisch angegeben. Aus seiner Zeichnung läßt sich entnehmen, daß die Hüllkurve stetig und stetig differenzierbar sein muß. Erste Versuche zur Klärung der physikalischen Bedeutung der Mohrschen Hüllkurve haben die Schüler von Ludwig Prandtl: Th. v. Kármán [2] und Robert Böker [3] durchgeführt. Sie haben u. a. die Übereinstimmung der wirklichen mit den aus der Hüllkurve ermittelten Bruchwinkel untersucht. Es ist nun die Normal- und Schubspannung σ und τ in der Bruchfläche aus

¹⁾ H. Marcus: Theorie des elastischen Gewebes, 1924, S. 17.

²⁾ Göttlicher: Ing.-Arch. 9 (1938), S. 12 (s. auch H. Vogt: Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten. Dissertation, Techn. Hochschule Hannover, 1938).

den versuchsmäßig ermittelten, an der Bruchgrenze liegenden Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_3 und dem Bruchwinkel α leicht zu berechnen. Sie lauten (aus $\sigma = \sigma_1 \cos^2 \sigma + \sigma_3 \sin^2 \alpha$, wenn sinus und cosinus durch tangens ausgedrückt werden)

$$\sigma_w = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \tau_w = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (1).$$

Der Index „w“ bedeutet die wahren Spannungen in der Bruchfläche gegenüber jenen, die sich aus der Mohrschen Hüllkurve (Index „h“) ergeben [4], [5].

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \sigma'_1}{1 + \sigma'_1}, \quad \tau_h = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \sigma'_1} \cdot \sqrt{\sigma'_1} \quad (2).$$

Dabei ist $\sigma'_1 = d\sigma_1/d\sigma_3$ die erste Ableitung der Grenzkurve

$$\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3) \quad (3).$$

Gl. (2) ergibt sich aus einer Berührungstransformation der Gl. (3). Mit Gl. (1), (2) sind die Kurven $\tau = \tau(\sigma)$ in Parameterform ausgedrückt. Wie man sieht, die Hüllkurve [Gl. (2)] ergibt sich aus einer rein formalen Transformation der Gl. (3), so daß Gl. (2) zwar mit der Gl. (1) übereinstimmen kann, dies aber nicht muß. Das würde dann und nur dann zutreffen, wenn laut Gl. (1) und (2)

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \sigma'_1 \quad (4).$$

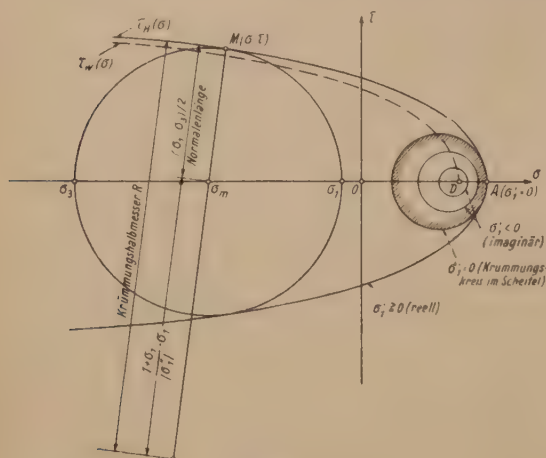


Bild 1

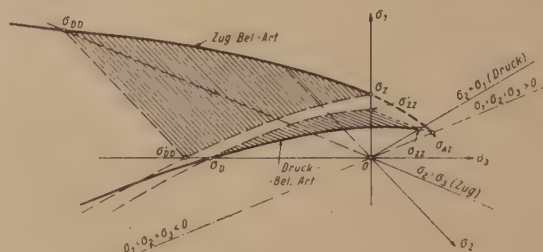


Bild 2

Gl. (4) besagt, daß die reelle Berührung der Grenzspannungskreise mit der Hüllkurve $\sigma'_1 \geq 0$ erfordert. Da erfahrungsgemäß die Hüllkurve der σ -Achse die konkave Seite ständig zuwenden muß, so muß

$$\sigma''_1 < 0 \quad (5)$$

ständig sein. Dann hat die Hüllkurve keinen Wendepunkt (Bild 1). Das hat auch Mohr vermutet und das mit einer Skizze zum Ausdruck gebracht. Die Gleichung des Krümmungshalbmessers der Hüllkurve lautet

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{1 + \sigma'_1}{\sigma'_1} \cdot \sigma'_1 \quad (6).$$

Da dieser bei reeller Berührung größer als die Normale der Hüllkurve $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ ist, so muß das zweite Glied der Gl. (6) positiv sein. Das ist wegen $\sigma'_1 > 0$ und $\sigma''_1 < 0$ auch tatsächlich der Fall. Im Scheitel der Hüllkurve gilt $\sigma'_1 = 0$ bzw. $R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$; hier ist der Krümmungskreis gleich dem Spannungskreis. Ist $\sigma'_1 < 0$ (bei $\sigma''_1 < 0$), so wird $R < (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Innerhalb des Krümmungskreises im Scheitel der Hüllkurve treten hier zum erstenmal die die Hüllkurve imaginär berührenden Grenzspannungskreise, die wahrscheinlich alle den Trennbruch ergeben, auf¹⁾. Sie schrumpfen in einem Punkt D zusammen (Bild 1), der die allseitig gleiche Zugfestigkeit, d. h. die Kohäsionsfestigkeit des Materials ergibt. Er ist ein isolierter Punkt der Hüllkurve und wahrscheinlich der Ausgangspunkt aller wahren Grenzkurven [Gl. (2)] für alle Belastungsarten (Bild 1).

Zwecks Überprüfung der Übereinstimmung dieser Gleichungen haben wir die Versuchsergebnisse von Roß und Eichinger [6], [7] im $KS(\sigma, \tau)$ aufgetragen (s. [4], Bild 14 oder [5], Bild 12). Es ergibt sich, daß die Ergebnisse der Gl. (1) und (2) nicht identisch sind. Im Druckgebiet stellt die Hüllkurve eine gute Näherung dar, während sich im Zuggebiet beträchtliche Unterschiede von der wahren Grenzkurve [Gl. (2)] ergeben. Hier geht diese Grenzkurve all-

¹⁾ Sie liegen nämlich zwischen zwei Punkten A und D, die Trennbruch liefern. Wir erinnern noch auf spröde Brüche von Schweißverbindungen, in welchen dreiaxiale Zugspannungen herrschen, die meistens nicht gleich groß sind.

mählich vom Verschiebungs- zum Trennbruch über, wobei der Krümmungskreis im Scheitel der Hüllkurve jener Spannungskreis ist, der als erster den Trennbruch liefert (nach Leon [8]). Weitere Trennbrüche ergeben sich — wie schon erwähnt — aus den der Hüllkurve imaginär berührenden Grenzspannungskreise.

Aus den Versuchen wissen wir, daß die gemessenen Bruchwinkel mit den theoretischen nach der Druckbelastungsart besser, mit jenen nach der Zugbelastungsart schlechter übereinstimmen. Um dies zu erklären, müssen wir uns den Schnitt der Grenzfläche $F(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = 0$ mit der Ebene $\sigma_2 = r\sigma_1 + q\sigma_3$, $r + q = 1$, räumlich vorstellen. Die Projektion dieser Schnittkurve in die Ebene (σ_3, σ_1) liefert die Grenzkurve Gl. (3), aus der sich durch Transformation die Hüllkurve [Gl. (2)] ergibt (s. Bild 2, 6, 7 des Verfassers [5]). Je nachdem, ob die Ebene $\sigma_2 = r\sigma_1 + q\sigma_3$ mehr oder weniger schief zur Projektionsebene (σ_3, σ_1) steht, werden die Grenzkurven [Gl. (3)] mehr oder weniger verzerrt ausfallen. Ebenso werden auch die Hüllkurven mehr oder weniger verzerrt sein. Diese Verzerrungen verursachen die besseren bzw. schlechteren Übereinstimmungen der wirklichen gegenüber den theoretischen Bruchwinkeln, d.h. jenen Bruchwinkeln und Spannungen, die sich aus der Hüllkurve [Gl. (4), (2)] ergeben²⁾.

Der isolierte Punkt D fällt mit dem Scheitelpunkt A der Hüllkurve nur dann zusammen, wenn die beiden Punkte ins Unendliche rücken. Dann fällt auch die wahre Grenzkurve mit der Hüllkurve in einem Geradenpaar zusammen. Dieses liegt parallel und symmetrisch zur σ -Achse. Physikalisch bedeutet dieser Fall den Fließbeginn von bildsamen Metallen. Dann fallen auch die Kurven $\tau_2(\sigma_m)$ — die alle Scheitelpunkte der Spannungskreise verbinden — mit den erwähnten zwei Kurven zusammen. Hieraus ersieht man, daß das Fließen der bildsamen Metalle nur ein Sonderfall der allgemeinen Bruchtheorie ist. Es wird daher die Untersuchung der Grenzzustände spröder Stoffe von grundsätzlicher Bedeutung für die Aufstellung der allgemeinen Bruchtheorie sein.

Literatur

- [1] O. Mohr: Z. VDI 44 (1900), S. 1524. Abhandlung aus dem Gebiete der Technischen Mechanik, 3. Aufl., S. 192. Ernst & Sohn 1928.
- [2] Th. v. Kármán: Z. VDI 55 (1911), S. 1749; Forsch.-Arb. Ing.-Wes. 37 (1912), H. 118.
- [3] R. Böker: Forsch.-Arb. Ing.-Wes. (1915), H. 175/176.
- [4] C. Torre: Österr. Ing.-Archiv 1 (1946), S. 316.
- [5] C. Torre: Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 15 (1949), S. 116 und 145.
- [6] M. Roß und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Bericht Nr. 28; II. Nichtmetallische Stoffe. EMPA in Zürich 1928.
- [7] M. Roß und A. Eichinger: Bruchgefahr fester Körper bei ruhender statischer Beanspruchung. Bericht Nr. 172. EMPA in Zürich 1949.
- [8] A. Leon: Ing.-Archiv 4 (1933), S. 421.

Zur Berechnung von Gewölbestaumauern als Schalen

Von H. Parkus in Wien

Es sei vorausgesetzt, daß die Mittelfläche der Schale Kreisbogen als Horizontalschnitte besitzt, deren Mittelpunkte auf einer ebenen Kurve liegen. Diese wird meistens so gewählt, daß sich annähernd der gleiche Zentriwinkel für alle Bogen ergibt („Gleichwinkelmauer“). Bezeichnet φ den von der Ebene der Mittelpunktskurve aus gezählten Bogenwinkel und z den nach abwärts positiv gezählten Abstand von einer durch die Mauerkrone gelegten Horizontal-ebene, so wählt man zweckmäßig das Koordinatennetz $q_1 = \varphi$, $q_2 = z$ auf der Schalenmittelfläche, welches aus den Kreisbogen $z = \text{konst}$ und aus den diese schiefwinklig schneidenden Kurven $\varphi = \text{konst}$ besteht. Aus der Parameterdarstellung der Mittelfläche:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r(z) \cos \varphi + f(z) \\ x_2 &= r(z) \sin \varphi \\ x_3 &= z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

wo $x_1 = f(z)$ die Gleichung der in der $x_1 - x_3$ -Ebene liegenden Mittelpunktskurve bedeutet, lassen sich dann die geometrischen Kenngrößen der Mittelfläche, also der Maßtensor $g_{\alpha\beta}$, der

²⁾ Hier kommt hauptsächlich das Gebiet zwischen der allseitig gleichen Zugfestigkeit σ_{AZ} , der Zugfestigkeit σ_Z und Umschlingungsdruckfestigkeit σ_{DD} in Frage, wo die Winkel deutlich schlecht übereinstimmen. Weiter im Druckgebiet stimmen die Winkel für alle Belastungsarten gut überein. Einen Sonderfall wollen wir hier noch besprechen: Die Ebenen der Zugbelastungsart ($\sigma_3 = \sigma_3$, $r = 0$, enthält die σ_1 -Achse) und der Druckbelastungsart ($\sigma_2 = \sigma_1$, $r = 1$, enthält die σ_3 -Achse) schließen mit der Projektionsebene den gleichen Winkel von 45° ein. Über den Grad der Verzerrung der Grenzkurve kann hier nur die relative Lage der Kurven zur Projektionsebene entscheiden. Die Kurve der Zugbelastungsart schneidet die σ_1 -Achse ($= \sigma_Z$) und läuft in weitem Bogen zur Spannung σ_{DD} (schlechte Übereinstimmung der Winkel), während die Kurve der Druckbelastungsart schneidet die σ_3 -Achse ($= \sigma_D$) und läuft zur Spannung σ_{ZZ} (Umschlingungszug) mit einem der σ_3 -Achse nahe liegenden Bogen (gute Übereinstimmung der Winkel). (Abb. 2.)

Haupttensor $b_{\alpha\beta}$ und der Maßtensor der sphärischen Abbildung $c_{\alpha\beta}$ sowie die Christoffelschen Dreiindizesymbole berechnen¹⁾. Die Dehn- und Biegesteifigkeit der Schale folgen aus dem vorgegebenen Verlauf der Schalendicke.

Eine analytische Lösung der Schalengleichungen dürfte auch bei radikaler Vereinfachung kaum möglich sein. Man wird daher zweckmäßig durch Einführung finiter Differenzen von den Differentialgleichungen auf Differenzengleichungen in den drei Verschiebungskomponenten u^α (in der Mittelfläche) und w (senkrecht zur Mittelfläche) übergehen und diese Differenzengleichungen dann entweder direkt oder mittels eines Iterationsverfahrens (Relaxationsmethode) lösen.

Die in jedem Netzkpunkt anzuschreibenden drei Grundgleichungen lauten^{2), 3)}

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \xi^{\alpha\beta} + \frac{\partial \eta_{\cdot\beta}^\alpha}{\partial q^\alpha} + p_e &= 0 \\ b_\alpha^\beta \eta_{\cdot\beta}^\alpha + c_{\alpha\beta} \xi^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \xi^{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + p_s &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Das Zeichen $\partial/\partial q^\alpha$ bedeutet die absolute (kovariante) Differentiation. $\eta_{\cdot\beta}^\alpha$ und $\xi^{\alpha\beta}$ sind die Komponenten des „Krafttensors“ bzw. „Momententensors“, die mit den Schnittkräften und Schnittmomenten gemäß

$$P_\alpha = \eta_{\cdot\alpha}^\beta \nu_\beta, \quad M^\alpha = \xi^{\beta\alpha} \nu_\beta, \quad Q = \frac{\partial \xi^{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \nu_\beta \quad \dots \dots \dots (2)$$

zusammenhängen. ν_β ist der kovariante Normalenvektor der die Normale der Mittelfläche enthaltenden Schnittebene.

Die Ausdrücke für den Krafttensor und den Momententensor als Funktionen der Komponenten u^α , w des Verschiebungsvektors der Mittelfläche gewinnt man am einfachsten mit Hilfe des Satzes vom Minimum der potentiellen Energie³⁾. Einen von den üblichen Annahmen der Schalentheorie abweichenden Weg sind Green und Zerna gegangen⁴⁾.

Die Mauer besitzt an der Krone einen freien und längs der Talflanken sowie der Talsohle einen elastisch eingespannten Rand. Die elastische Einspannung berücksichtigt man nach Vogt⁵⁾ zum Beispiel in der Weise, daß man sich die Schale um ein bestimmtes Stück in den Fels hinein verlängert denkt und dort starre Einspannung annimmt. Es gelten dann längs der Flanken und der Sohle die vier geometrischen Randbedingungen

$$u^1 = u^2 = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \dots \dots \dots (4),$$

wobei die letzte Bedingung auch durch $\frac{\partial w}{\partial q^1} = 0$ an den Flanken bzw. $\frac{\partial w}{\partial q^2} = 0$ an der Sohle ersetzt werden kann, da längs dieser Ränder w identisch verschwindet. An der Mauerkrone gelten die vier dynamischen Randbedingungen

$${}^{(2)}P_\alpha = 0, \quad {}^{(2)}M^2 = 0, \quad {}^{(2)}\bar{Q} \equiv {}^{(2)}Q + \frac{\partial {}^{(2)}M^1}{\partial q^1} = 0 \quad \dots \dots \dots (5).$$

Der geklammerte Index soll andeuten, daß es sich um die Koordinatenlinie $q_2 = 0$ handelt, so daß also für den Normalenvektor ${}^{(2)}\nu_\alpha$

$${}^{(2)}\nu_1 = 0, \quad {}^{(2)}\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \quad \dots \dots \dots (6)$$

gilt. \bar{Q} ist die Kirchhoffsche Ersatzquerkraft.

Spannungs- und Formänderungszustand in Hochdruckrohren mit ausmittiger Bohrung

Von W. Wuest in Göttingen

Im Schrifttum existieren voneinander abweichende Lösungen für den Spannungszustand in exzentrisch gebohrten Rohren unter Innendruck. Dieser wird daher erneut abgeleitet, wobei es sich als wesentlich erweist, die bei zweifach zusammenhängenden Flächen geforderten Umlaufrelationen zu erfüllen. Die Gültigkeit der Weinelschen Formeln für die Größtwerte der

¹⁾ Griechische Indizes durchlaufen stets die Werte 1, 2.

²⁾ E. A. Deuker: Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 81, 169.

³⁾ H. Parkus: Österr. Ing.-Archiv 4 (1950), S. 160.

⁴⁾ A. E. Green und W. Zerna: Quart. J. Mech. appl. Math. 3 (1950), S. 9.

⁵⁾ F. Vogt: II. Weltkraftkonferenz. Berlin 1930. Bd. IX.

Tangentialspannung an der Innen- und Außenseite der schwächsten Stelle des exzentrischen Kreisquerschnittes wird auf diese Weise bestätigt. Die so gewonnene Lösung wird dazu benutzt, die Krümmungsänderung exzentrisch gebohrter Rohre unter Innendruck zu berechnen. Die Rechnung liefert das einfache Ergebnis, daß die Querkontraktion die Krümmungsänderung im Verhältnis $1-2/m$ herabsetzt¹⁾. Der Krümmungseffekt wird zur Messung sehr hoher Drucke (im Bereich von 1000 bis 10000 at) technisch angewandt. Die Theorie wird in Übereinstimmung mit Meßergebnissen befunden. (Die ausführliche Arbeit ist im Ingenieur-Archiv 19 (1951) H. 1, S. 12—21 erschienen.)

Druckverteilung unter elastisch gelagerten Kreisplatten

Von H. Jung in Stuttgart

Wird der elastische Halbraum $z \geq 0$ durch eine rotationssymmetrische Belastung beansprucht, so ist die Verschiebung der Oberfläche $z=0$ mit der Abkürzung

$$g_1(\lambda) = \int_0^a p_1(\varrho) \varrho J_0(\lambda \varrho) d\varrho \quad \dots \quad (1)$$

gegeben durch²⁾

$$w_1(r) = \frac{m-1}{Gm} \int_0^\infty g_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad \dots \quad (2a).$$

Die Druckverteilung zwischen Platte und Halbraum ist

$$p_1(r) = \int_0^\infty g_1(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \quad \dots \quad (2b).$$

Die Durchbiegung der Kreisplatte (Bild 1) genügt der Differentialgleichung

$$\Delta \Delta w_2 = \frac{1}{N} (p_2(r) - p_1(r)); \quad \left. \begin{aligned} \Delta &\equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

Die Lösung von (3) läßt sich in der Form angeben

$$w_2(r) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \left[\int_0^a p_2(\varrho) \cdot \varrho J_0(\lambda \varrho) d\varrho - g_1(\lambda) + c_0 a J_0(\lambda a) + c_1 a \lambda J_1(\lambda a) + c_2 a \lambda^2 J_0(\lambda a) + c_3 a \lambda^3 J_1(\lambda a) \right] \frac{1}{\lambda^3} J_0(\lambda r) d\lambda \quad \dots \quad (4).$$

Die Konstanten c_0 und c_2 lassen sich aus den Randbedingungen bestimmen. Damit das Integral (4) existiert, muß die Funktion

$$g_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^4} \left[\int_0^a p_2(\varrho) \cdot \varrho J_0(\lambda \varrho) d\varrho - g_1(\lambda) + c_0 a J_0(\lambda a) + c_1 a \lambda J_1(\lambda a) + c_2 a \lambda^2 J_0(\lambda a) + c_3 a \lambda^3 J_1(\lambda a) \right] \quad \dots \quad (5)$$

beschränkt und quadratisch integrierbar sein. Daraus ergibt sich, daß der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_2(\lambda) \neq \infty \quad \dots \quad (6)$$

existieren muß. Aus dieser Bedingung erhält man gerade zwei Gleichungen zur Bestimmung von c_1 und c_3 .

Macht man nun die Annahme, die Platte liege reibungsfrei auf dem Halbraum auf, so muß

$$\begin{aligned} w_1(r) &= w_2(r) & \text{für } r \leq a, \\ p_1(r) &\equiv 0 & \text{,, } r < a \end{aligned}$$

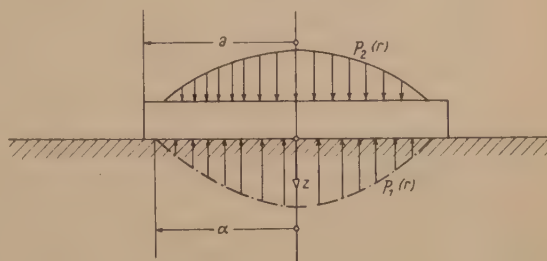


Bild 1

¹⁾ Inzwischen konnte nachgewiesen werden, daß unter der Voraussetzung reiner Druckbelastung diese Gesetzmäßigkeit auch bei beliebig geformten Ringquerschnitten gilt.

²⁾ H. Jung: Ing.-Archiv XVIII (1950), S. 178.

erfüllt sein. Mit (4) und (2a) erhält man die Integralgleichung¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{m-1}{G \cdot m} \int_0^\infty g_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda &= \frac{1}{N} \int_0^\infty \left[\int_0^a p_2(\varrho) \cdot \varrho J_0(\lambda \varrho) d\varrho - g_1(\lambda) + c_1 a \lambda J_1(\lambda a) \right. \\ &\quad \left. + c_2 a \lambda^2 J_0(\lambda a) + c_3 a \lambda^3 J_1(\lambda a) \right] \frac{1}{\lambda^3} J_0(\lambda r) d\lambda; \quad r \leq a \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_0^\infty g_1(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \equiv 0 \quad \text{für } r > a \quad (8).$$

Macht man für $g_1(\lambda)$ den Ansatz

$$g_1(\lambda) = \sum A_n \lambda^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha \lambda) \quad (9),$$

so ist (8), wie einfach nachzuweisen ist, erfüllt. Setzt man (9) in (7) ein, so wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{m-1}{G \cdot m} \sum A_n \int_0^\infty \lambda^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha \lambda) \cdot J_0(\lambda r) d\lambda \\ = \frac{1}{N} \int_0^\infty \left[\int_0^a p_2(\varrho) \cdot \varrho J_0(\lambda \varrho) d\varrho - \sum A_n \lambda^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha \lambda) + c_1 a \lambda J_1(\lambda a) \right. \\ \left. + c_2 a \lambda^2 J_0(\lambda a) + c_3 a \lambda^3 J_1(\lambda a) \right] \frac{1}{\lambda^3} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

Aus den Randbedingungen und der Gleichgewichtsbedingung erhält man drei Gleichungen für A_0 , c_1 und c_2 . Die Konstanten A_n und c_3 werden nun dadurch bestimmt, daß man (10) auf den Kreisen $r = \frac{\alpha}{\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) streng erfüllt. Man erhält gerade n Gleichungen zur Bestimmung der A_n ($n = 1, 2, \dots$) und c_3 .

Liegt die Platte im belasteten Zustand auf der Fläche $r < \alpha$ auf, so muß auf dem Kreis $r = \alpha$ die Ableitung $\frac{dw_1}{dr}$ endlich bleiben. Dies führt auf die Bedingung

$$A_0(\alpha) = 0 \quad (11),$$

wobei zu beachten ist, daß A_0 als Funktion der A_n und α durch die Gleichgewichtsbedingung gegeben ist.

Stoßwellen in isotropen elastischen Medien²⁾

Von Hans Richter in Haltingen/Baden

Die üblichen Rechnungen über elastische Wellenfronten in festen Körpern sind akustischer Natur mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes. Das letztere genügt nicht mehr zur Beschreibung echter Stoßwellen mit Entropiesprung; hierfür ist eine Zustandsgleichung erforderlich, die für endliche Deformationen und endliche Entropieänderungen den Spannungszustand angibt. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf ebene Stoßwellen, die in entspanntes isotropes Material hineinlaufen oder Entspannung desselben bewirken. Zugrunde gelegt wird das isotrope Elastizitätsgesetz³⁾ in seiner allgemeinsten Gestalt⁴⁾, wobei der Spannungstensor P als Polynom 2. Grades des logarithmischen Deformationsdeviators \tilde{L} erscheint mit den Ableitungen der

¹⁾ Es ist $c_0 = 0$, da am Außenrand der Platte die Querkraft $q_r = 0$ sein muß.

²⁾ Eine ausführliche Wiedergabe ist beabsichtigt.

³⁾ Die bei starken Stoßwellen entstehenden plastischen Deformationen treten wegen der geringen zur Verfügung stehenden Zeit erst hinter der Stoßwelle auf und wirken auf dieselbe im Sinne einer Schwächung im Laufe des Fortschreitens ein. Auf die Stoßwellenberechnung selbst sind sie ohne Einfluß.

⁴⁾ H. Richter: Das isotrope Elastizitätsgesetz. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 205–209.

spezifischen inneren Energie $u = u(j, y, z, s)$ nach den Invarianten j, y, z von I als Koeffizienten; $s =$ Entropie. Die lineare Näherung liefert das Hookesche Gesetz mit vier Materialkonstanten, die sich z.B. durch den adiabatischen Volumkompressionsmodul, den Schermodul, den Wärmeausdehnungskoeffizienten und eine spezifische Wärme ausdrücken lassen. Bei der quadratischen Näherung treten sieben weitere Konstanten auf.

Bei stationärer Betrachtung der Stoßwelle wird die Stoßwellengeschwindigkeit v_1 zur senkrecht zur Front stehenden Anströmgeschwindigkeit im spannungsfreien Ausgangszustand I , die Abströmgeschwindigkeit besitzt die Komponenten v_2 senkrecht und w_2 parallel zur Front; ϑ sei der Abknickwinkel der Stromlinien. Auf einer Kontrollfläche parallel zur Front im Endzustand II herrschen die Normalspannung σ_2 und die Tangentialspannung τ_2 . Die vier Erhaltungssätze für Masse, Impulskomponenten und Energie liefern drei Gleichungen zwischen $v_1, v_2, w_2, \sigma_2, \tau_2, u_2$. Bei Bildung von L in II lassen sich alle Verzerrungen und der Winkel q zwischen Hauptachsen und v_1 durch die „natürlichen Dehnungen“ ξ und η ausdrücken. Die Verwendung des Elastizitätsgesetzes liefert dann drei Gleichungen für ξ, η, s_2 und den „inkompressiblen Staudruck“ $q = \frac{1}{2} \varrho_1 v_1^2$. Bei Lösung durch Potenzreihenansatz ergeben sich wie im akustischen Falle zwei Lösungstypen:

Typ K. Reine Kompressionsfront. Maßgeblich ist neben der akustischen Longitudinalwellengeschwindigkeit c_l eine Materialkonstante F_K der quadratischen Näherung des Elastizitätsgesetzes. Legt man die Stoßstärke durch die Verdichtung $\omega = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_1}$ fest, so wird für Stoßwellengeschwindigkeit und Entropiesprung

$$v_1/c_l = 1 + F_K \cdot \omega + \dots, \quad s_2 - s_1 = \frac{1}{3} \varrho_1 c_l^2 \cdot \frac{F_K}{\Theta_1} \cdot \omega^3 + \dots$$

mit $\Theta_1 =$ absolute Temperatur in I . Bei $F_K > 0$ ist die Front stabil, und v_1 wächst mit der Stoßstärke; bei $F_K < 0$ ist eine Verdichtungsfront unmöglich. Versuche von Pack-Evans-James¹⁾ ergaben für Stahl keine meßbare Erhöhung von v_1 gegenüber c_l ; F_K ist also, wenn überhaupt positiv, sehr klein. Bei Blei dagegen zeigte sich eine Erhöhung von $c_l = 2150$ m/sec auf $v_1 = 3020$ m/sec bei einem Stoßwellendruck von $p_2 = 270\,000$ at. Hieraus ergibt sich $\omega \approx 35\%$ und $\approx 900^\circ \text{C}$ für die Endtemperatur, was in Anbetracht der Größe von p_2 kein Widerspruch zur Voraussetzung des festen Aggregatzustandes in II zu sein braucht.

Typ S. Front mit Scherung. Neben der akustischen Transversalwellengeschwindigkeit c_t tritt noch eine Materialkonstante F_S der 2. Näherung auf. $\frac{v_1}{c_t} = 1$, ω und s_2 sind hier von 2. Ordnung in der Stoßwellenstärke, die durch ϑ oder τ_2 charakterisiert wird. Die Richtung der Hauptspannungslinien weicht in 1. Ordnung von 45° ab. Der Entropiesprung ist von 4. Ordnung und unabhängig vom verwendeten Material stets negativ. Diese Fronten existieren also nur dann, wenn sie Entlastung hervorrufen; doch ist die Auffächerung bei Belastungsschubfronten so gering, daß genügend genau mit einer Front gerechnet werden darf unter Berücksichtigung des Auftretens von s_2, ω und der Korrektur an φ .

Ein Referat des Vortrages:

W. Weibull, Bofors: Die Festigkeit von festen Körpern als Wahrscheinlichkeitsfrage ist nicht eingegangen.

Ein ausführlicher Bericht über den Vortrag von M. Roš, Zürich: Die Ermüdung der Metalle wird in einem späteren Hefte der Zeitschrift erscheinen.

¹⁾ D. C. Pack, W. M. Evans und H. J. James: The propagation of shock waves in steel and lead. Proc. Phys. Soc. 60 (1948), p. 1—8.

G. Strömungslehre

Inkompressible Potentialströmungen durch gerade, unendliche Schaufelgitter

Von *M. Strscheletzky* in Friedrichshafen am Bodensee

Die klassische Methode behandelt das Problem der Umströmung von geraden Gittern durch konforme Abbildung. Für praktische Zwecke ist es wesentlich bequemer und anschaulicher, die Umströmung von Schaufelgittern aus Singularitäten aufzubauen, die innerhalb der Schaufeln oder auf ihrer Oberfläche kontinuierlich verteilt sind.

Bei praktischen Berechnungen treten zwei Probleme auf:

1. Ermittlung der Schaufelform des Gitters, wenn die Strömung vor und hinter dem Gitter vorgegeben ist, und
2. Ermittlung der Wirkung des vorgegebenen Gitters auf die Strömung, die weit vor dem Gitter bekannt ist.

In der vorliegenden Mitteilung werden diese beiden Probleme behandelt und zwar unter der Voraussetzung, daß die Schaufeln unendlich dünn sind und die inkompressible Flüssigkeit reibungsfrei ist.

Die Länge l der Schaufelsehne, der Neigungswinkel β und die Teilung t kennzeichnen die Bauart des Gitters (Bild 1). Der Verlauf des Winkels $\beta(s)$ längs der Schaufellänge l_s bestimmt

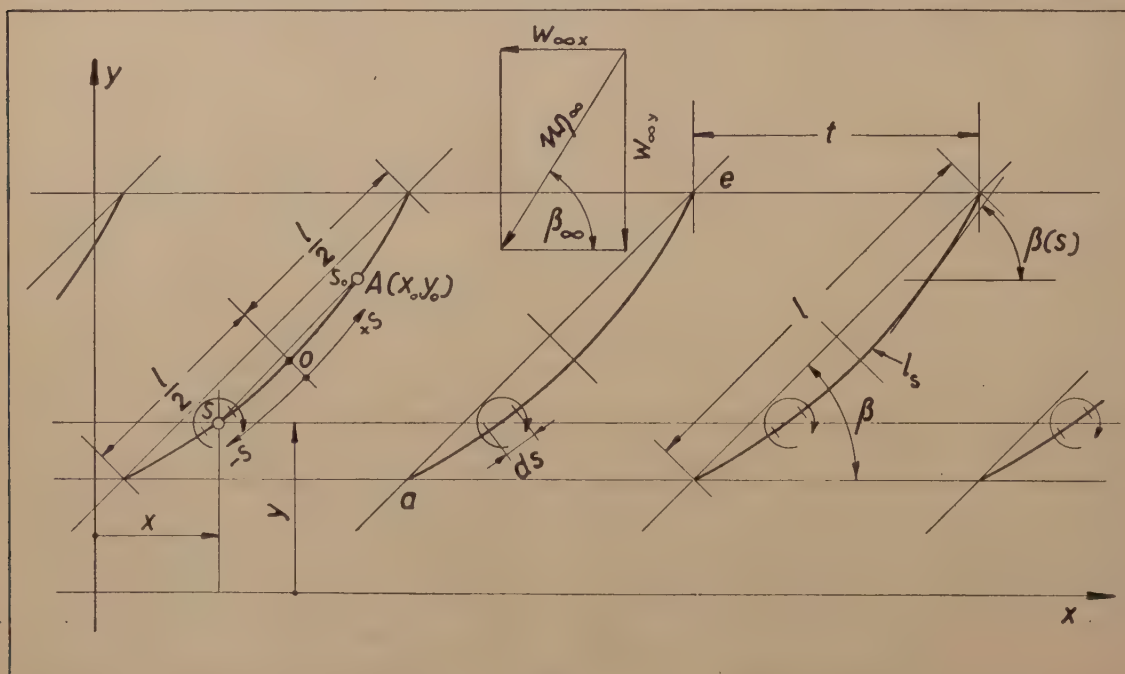


Bild 1

eindeutig die Schaufelform. Weit vor dem Gitter herrscht die gleichförmige Strömung w_1 . Unter dem Einfluß des Gitters ändert die Geschwindigkeit w_1 ihre Größe und Richtung bis auf w_2 , die weit hinter dem Gitter ein gleichförmiges Geschwindigkeitsfeld bildet.

Die Umströmung der Schaufeln erhält man dadurch, daß man einer kontinuierlichen Verteilung der gebundenen Wirbel $\gamma(s)$ auf den Schaufelkonturen eine Parallelströmung überlagert, die auf der betreffenden Ebene (x, y) in Abwesenheit des Gitters herrsche (w_∞). Die Zirkulation der Geschwindigkeit um eine jede Schaufel ist dann

$$\Gamma = \int_{(l_s)} \gamma(s) \cdot ds \quad \dots \dots \dots (1).$$

Die lokale Geschwindigkeit $w(w_x, w_y)$, die bei Umströmung des Gitters im Aufpunkt $A(x_0, y_0)$ der Schaufelkontur entsteht, ist

$$w = w_\infty + \vec{v} \pm \frac{\gamma(s)}{2} \quad \dots \dots \dots (2),$$

wobei die Komponente $v \pm \frac{\gamma(s)}{2}$ von den gebundenen Wirbeln induziert wird. Die Geschwindigkeit $\frac{\gamma(s)}{2}$ ist zu der gebundenen Wirbelschicht bzw. Schaufelkontur tangential gerichtet.

Da die Schaufelkontur mit einer Stromlinie der Umströmung zusammenfällt, soll die Normalkomponente der lokalen Geschwindigkeit an der Schaufeloberfläche verschwinden. Daraus folgt die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \beta(s) = \frac{w_y + v_y}{w_{\infty x} + v_x} \quad \dots \quad (3),$$

die den Zusammenhang zwischen der Schaufelform und dem Geschwindigkeitsfeld darstellt.

Bei der Ermittlung der induzierten Geschwindigkeit $v(v_x, v_y)$ pflegt man, der Methode von A. Betz folgend¹⁾, zuerst das Geschwindigkeitsfeld zu betrachten, welches an der Stelle der „0“-Schaufel unter dem Einfluß der übrigen Schaufeln entsteht, und dann dieses Feld mit den von der „0“-Schaufel induzierten Geschwindigkeiten zu überlagern. Damit erhält man:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{1}{t} \int_{(l_s)} a(s, s_0) \cdot \gamma(s) \cdot ds + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(l_s)} \frac{(y_0 - y) \cdot \gamma(s) \cdot ds}{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2} = v'_x + v''_x, \\ v_y &= \frac{1}{t} \int_{(l_s)} b(s, s_0) \cdot \gamma(s) \cdot ds - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(l_s)} \frac{(x_0 - x) \cdot \gamma(s) \cdot ds}{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2} = v'_y + v''_y \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4),$$

wobei:

$$\begin{aligned} a(s, s_0) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{2(y_0 - y) \cdot \pi}{t}}{\cos \frac{2(y_0 - y) \cdot \pi}{t} - \cos \frac{2(x_0 - x) \cdot \pi}{t}} - \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{y_0 - y}{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2}, \\ b(s, s_0) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{2(x_0 - x) \cdot \pi}{t}}{\cos \frac{2(y_0 - y) \cdot \pi}{t} - \cos \frac{2(x_0 - x) \cdot \pi}{t}} + \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{x_0 - x}{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2} \end{aligned}$$

bedeuten. Die Funktionen $a(s, s_0)$ und $b(s, s_0)$ sind im ganzen Integrationsbereich stetig. Daraus kann man folgern, daß eine numerische Auswertung der ersten Integrale (4) immer möglich ist, sobald die Wirbelverteilung und die Kontur l_s bekannt sind. Die Funktionen $a(s, s_0)$ und $b(s, s_0)$ hängen nur von der relativen Lage der Wirbel und des Aufpunktes ab und können deshalb ein für allemal gerechnet und in Form von Berechnungskurven dargestellt werden²⁾.

Für die Ermittlung der von der „0“-Schaufel induzierten Geschwindigkeit (v'') ist es zweckmäßig anzunehmen, daß die Wirbelbelegung der Formel entspricht

$$\gamma(\varphi) = \frac{\sum_{n=0}^n R_n \cdot \cos n\varphi}{\sin \varphi}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \quad (5),$$

wobei $\varphi = \arccos \left(-\frac{2s}{l_s} \right)$ bedeutet. Für die Schaufeln, die genügend kleine relative Wölbung haben und genügend breite Gitter bilden, kann man die gebundenen Wirbel nicht über die Schaufelkonturen, sondern längs der Streckenprofile (β, l) kontinuierlich verteilen. Damit erhält man:

$$\left. \begin{aligned} v''_x &= \frac{\sin \beta}{2\pi} \cdot \int_{(l)} \frac{\gamma(s) \cdot ds}{s_0 - s} = \frac{\sin \beta}{2} \cdot \frac{\sum_{n=1}^n R_n \cdot \sin n\psi}{\sin \psi} \\ v''_y &= -\frac{\cos \beta}{2\pi} \cdot \int_{(l)} \frac{\gamma(s) \cdot ds}{s_0 - s} = -\frac{\cos \beta}{2} \cdot \frac{\sum_{n=1}^n R_n \cdot \sin n\psi}{\sin \psi} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6),$$

wobei $\psi = \arccos \left(-\frac{2s_0}{l} \right)$ ist. Bei größeren relativen Wölbungen und engeren Gittern kann man aus dem Integrationsbereich (l_s) eine genügend kleine Umgebung des Aufpunktes aus-

¹⁾ A. Betz: Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen. Ing.-Arch. II. (1931), S. 359–371.

²⁾ Die vollständigen Berechnungskurven $a(s, s_0)$ und $b(s, s_0)$ können vom Verfasser als Pausen bzw. Fotokopien in der Größe 45×66 cm ($t \approx 200$ mm) bezogen werden.

schließen, für welche eine streckenartige Wirbelbelegung ohne weiteres angenommen werden kann. Die entsprechenden Berechnungsformeln für v_x'' und v_y'' werden im Vortrag angeführt.

Bei dem zweiten Problem ist es nötig, die Wirkung eines vorgegebenen Gitters auf die Strömung zu ermitteln. In diesem Falle ist sowohl die Schauffelform als auch die Bauart des Gitters bekannt. Außerdem wird die Geschwindigkeit weit vor dem Gitter vorgegeben. Es wird die Verteilung der gebundenen Wirbel, die Zirkulation und die Auftriebszahl bzw. die Charakteristik des Gitters $c_{ag} = f(\alpha)$ gesucht³⁾.

Aus der Gl.(3) erhält man unter der Voraussetzung (5) die Integralgleichung:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta(s) \cdot \left[w_{1x} - \frac{1}{2t} \cdot \int_{(l_s)} \gamma(s) \cdot ds + \frac{1}{t} \cdot \int_{(l_s)} a(s, s_0) \cdot \gamma(s) \cdot ds + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(l_s)} \frac{(y_0 - y) \cdot \gamma(s) \cdot ds}{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2} \right] \\ - \left[w_y + \frac{1}{t} \cdot \int_{(l_s)} b(s, s_0) \cdot \gamma(s) \cdot ds - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(l_s)} \frac{(x_0 - x) \cdot \gamma(s) \cdot ds}{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

oder, nach Auswertung der Integrale für streckenartige Wirbelbelegung (β , l), die lineare Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta(s) \cdot \left[w_{1x} - \frac{1}{2t} \cdot \frac{l}{2} \cdot R_0 \cdot \pi + \frac{l}{2t} \cdot \sum_{n=0}^n R_n \cdot K_{an} + \frac{\sin \beta}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^n R_n \cdot J_n(\psi) \right] \\ - \left[w_y + \frac{l}{2t} \cdot \sum_{n=0}^n R_n \cdot K_{bn} - \frac{\cos \beta}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^n R_n \cdot J_n(\psi) \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8),$$

wobei

$$K_{(a,b)n} = \int_0^\pi \frac{a(s, s_0)}{b(s, s_0)} \cdot \cos n\varphi \cdot d\varphi$$

und

$$J_n(\psi) = \pi \frac{\sin n\psi}{\sin \psi}$$

bedeuten.

Die gesuchte Verteilung der gebundenen Wirbel soll außer der Gl.(7) bzw. (8) noch der Bedingung der tangentialen Umströmung der scharfen Austrittskante entsprechen. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$\sum_{n=0}^n R_n = 0 \quad \dots \dots \dots (9).$$

Um die Werte von R_n zu ermitteln, pflegt man die Gl.(8) für n Aufpunkte der Schauffelsehne zusammenzustellen. Diese n Gleichungen bilden zusammen mit der Gl.(9) ein System von $n+1$ linearen Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten, welches leicht zu lösen ist.

Im Vortrag werden einige Zahlenbeispiele angeführt. Die Berechnungen können nach diesem Verfahren mit praktisch beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden. Das Verfahren gilt für beliebige Bauart des Gitters und für beliebige Form der Schauffeln.

Berechnung von Strömungsfunktionen

Von Guntram v. Gorup in Darmstadt

Die Kontur C eines Zylinders, dessen Außenraum mit idealer ursprünglich ruhender Flüssigkeit erfüllt ist, sei zeitlich veränderlich. Gesucht wird die Strömungsfunktion $W(z, t)$ der im Außenraum entstehenden ebenen Strömung.

Voraussetzungen: 1. Kenntnis der Abbildungsfunktionen $z(\tau, t)$ zwischen C und dem Einheitskreis (E.K.) der τ -Ebene; die Funktion soll die beiden Außenräume ausnahmslos konform ineinander abbilden und das Unendliche fest lassen. 2. $z(\tau, t)$ und $\frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z}(\tau, t)$ seien meromorph in τ .

Zur Berechnung von $W(z, t) = w(\tau, t)$ wird die Randbedingung

$$\left(\frac{\overline{w'}}{z'} \right)_n = (\dot{z})_n \quad \text{auf E. K.} \quad \dots \dots \dots (1)$$

³⁾ $\alpha = \beta_\infty - \beta$.

$\left(\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ in eine Funktionalgleichung für w umgeformt. Dabei wird der folgende Kunstgriff benutzt, der es erlaubt, die konjugiert komplexen Werte einer beliebigen analytischen Funktion $f(\tau, t)$ längs E. K. durch die Randwerte einer anderen analytischen Funktion $f(\tau, t)^*$ auszudrücken:

$$\overline{f(\tau, t)} = \overline{f(\bar{\tau}, t)}_{(\text{auf E. K.})} = \bar{f}\left(\frac{1}{\tau}, t\right) \equiv f(\tau, t)^* \quad \dots \quad (2).$$

Man erhält so die Funktionalgleichung:

$$\tau w' + \frac{1}{\tau} w'^* = \tau \dot{z}^* z' + \frac{1}{\tau} \dot{z} z'^* \quad \dots \quad (3).$$

Mit Hilfe der (wegen der Meromorphie möglichen) Zerlegung:

$$\dot{z}^* z' = R(\dot{z}^* z') + S(\dot{z}^* z') \quad \dots \quad (4)$$

(R im Außenraum regulär, im Unendlichen wie $\frac{1}{\tau}$ verschwindend) kann man die Lösung von (3) anschreiben:

$$w' = R(\dot{z}^* z') + \frac{1}{\tau^2} S(\dot{z}^* z')^* \quad \dots \quad (5).$$

Die darin enthaltene Zirkulation läßt sich durch Addition eines Termes $\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\tau}$ einer vorgegebenen Bedingung anpassen.

Beispiel: Pulsierende Ellipse.

Abbildungsfunktion: $z = l\tau + m\frac{1}{\tau}, \quad \begin{pmatrix} l+m=a \\ l-m=b \end{pmatrix}$

Folglich: $\dot{z} = \dot{l}\tau + \dot{m}\frac{1}{\tau},$

$$\dot{z}^* = \dot{l}\frac{1}{\tau} + \dot{m}\tau,$$

$$z' = l - m\frac{1}{\tau^2}; \quad \text{gibt: } S(\dot{z}^* z') = l\dot{m}\tau.$$

Somit nach (5): $w' = (l\dot{l} - m\dot{m})\frac{1}{\tau} - (l\dot{m} - l\dot{m})\frac{1}{\tau^3},$

$$w = (l\dot{l} - m\dot{m})\ln \tau + \frac{1}{2}(l\dot{m} - l\dot{m})\frac{1}{\tau^2}.$$

Integralgleichungen erster Art in der Strömungslehre und ihre Auflösung

Von K. Nickel in Stuttgart

Bei stationären, inkompressiblen und reibungsfreien Potentialströmungen läßt sich die Strömung um beliebig geformte Konturen auf folgende Art erhalten: Man belegt die Randkontur mit Wirbeln und bestimmt deren Stärke γ so, daß überall auf dem Rand die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwindet. Bei der rechnerischen Durchführung kommt man dabei häufig auf Fredholmsche Integralgleichungen erster Art für γ . In dem Vortrag wurden zwei Probleme behandelt:

1. Die zweidimensionale Strömung um ein dünnes, schwachgewölbtes Flügelprofil führt nach Birnbaum (diese Zeitschrift, Bd. 3 (1923), S. 290 ff.) auf eine Integralgleichung, deren Lösung seit langem bekannt ist. Betrachtet man n Tragflügel, so kommt man auf ein System von n Integralgleichungen erster Art. Dieses läßt sich streng lösen, falls alle Flügel hintereinander liegen (abgedruckt in Mathem. Ztschr. Bd. 54 (1951), S. 81—96; für $n=2$ war das System schon von H. Söhngen: Mathem. Ztschr. Bd. 47 (1941), S. 16—33 gelöst worden), es lassen sich weiter geschlossene Ausdrücke für den Gesamtauftrieb und das Gesamtmoment angeben. — Falls die n Tragflügel beliebig angeordnet sind, konnte das Gleichungssystem zwar nicht gelöst, aber wenigstens auf eine einzige Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art zurückgeführt werden. — Da in der Prandtl'schen Theorie der tragenden Linie Integralgleichungen derselben

Art vorkommen, kann die gefundene Auflösungsformel auch auf solche dreidimensionale Probleme angewandt werden. Als Beispiel wurde die Auftriebsverteilung geringsten induzierten Widerstandes zweier benachbarter Tragflügel behandelt und der zugehörige Widerstand bestimmt (ausdrückbar durch elliptische Integrale).

2. Analog zu dem Ergebnis von Birnbaum im Falle eines einzigen Flügels ergibt sich im Falle der Staffelwinkel $\beta = 0^\circ$ oder $\beta = 90^\circ$ für die Zirkulationsverteilung $\gamma(x)$ eines unendlichen Gitters aus dünnen, schwachgewölbten Flügeln in zweidimensionaler Strömung die Integralgleichung:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{k}{2\pi u_\infty} \int_a^b \gamma(y) \operatorname{ctg} k(x-y) dy.$$

Dabei ist nach Bild 1 die Skelettlinie eines der Gitterprofile auf der Strecke $a \leq x \leq b$ durch $f(x)$ gegeben, weiter ist $k = \frac{\pi}{t} e^{-i\beta}$ gesetzt, die Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen sei u_∞ .

Die Auflösung dieser Integralgleichung lautet¹⁾:

$$\gamma(y) = \frac{2 u_\infty k}{\pi} \sqrt{\frac{\sin k(b-y)}{\sin k(y-a)}} \int_a^b \frac{df(x)}{dx} \left[\operatorname{ctg} k(x-y) + \operatorname{tg} k \frac{b-a}{2} \right] \sqrt{\frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-x)}} dx.$$

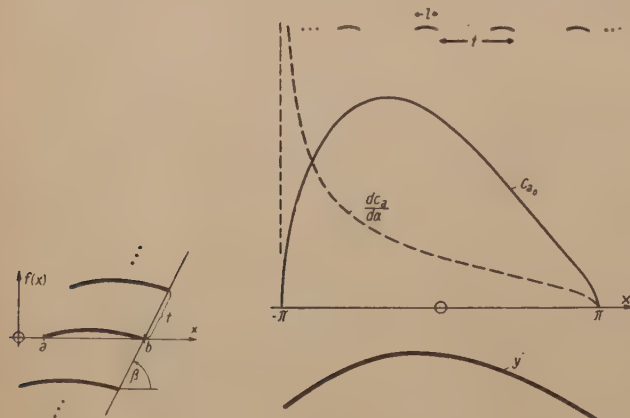


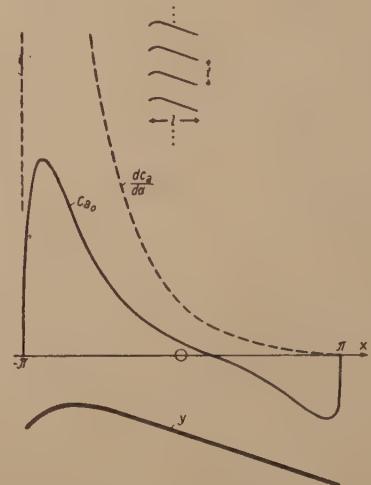
Bild 1

$$y = \cos \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{x}{4} - \sin \frac{x}{3} \right)$$

$$c_{a_0} = \sqrt{2 \cos \frac{x}{3} - 1} \left(\cos \frac{x}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x}{6} \right)$$

$$\frac{dc_{a_0}}{dx} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi-x}{6}}{\sin \frac{\pi+x}{6}}}, \quad \frac{l}{t} = \frac{1}{3}$$

Bild 2



$$y = -\cos 2x + \operatorname{ctg} 2\pi (\sin 2x - 2x \cos^2 \pi)$$

$$c_{a_0} = \sqrt{\sin(\pi+x) \sin(\pi-x)} (\cos x - 2 \operatorname{ctg} 2\pi \sin x)$$

$$\frac{dc_{a_0}}{dx} = \sqrt{\frac{\sin(\pi-x)}{\sin(\pi+x)}}, \quad \frac{l}{t} = 2$$

Bild 3

Als Gesamtauftrieb eines Flügels aus dem Verband ergibt sich

$$A = \rho u_\infty \int_a^b \gamma(y) dy = \frac{2 \rho u_\infty^2}{\cos k \frac{b-a}{2}} \int_a^b \frac{df(x)}{dx} \sqrt{\frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-x)}} dx.$$

Für $\frac{df(x)}{dx} = \alpha$ (Streckenprofil) findet man hieraus z. B.:

$$\gamma(y) = \frac{2 \alpha u_\infty}{\cos k \frac{b-a}{2}} \sqrt{\frac{\sin k(b-y)}{\sin k(y-a)}}, \quad A = \frac{2 \pi \alpha}{k} \rho u_\infty^2 \operatorname{tg} k \frac{b-a}{2};$$

in Bild 2 und 3 sind noch zwei weitere Beispiele aufgezeichnet.

¹⁾ Auf der Tagung erfuhr ich von Herrn Dr. J. Dörr-Darmstadt, daß ihm diese Auflösungsformel bereits seit drei Jahren bekannt ist; eine Arbeit darüber erscheint im nächsten Heft des Ingenieur-Archivs.

Zur Theorie der unstetigen Strömungen

Von *Richard Eppler* in Stuttgart

Die wichtigste Methode der Hydromechanik, die es bisher ermöglichte, auf rein theoretischem Weg Widerstandsbeiwerte zu berechnen, ist die Theorie der unstetigen Strömungen, die auf Helmholtz und Kirchhoff zurückgeht. Sie liefert aber nur dann einen (viel zu niedrigen) Widerstand, wenn die Totwasserbreite parabolisch unendlich wird, was mit der Wirklichkeit schlecht übereinstimmt. Es wurde schon vielfach versucht, diese Mängel zu beseitigen. Dabei wurden aber immer gewisse Daten aus dem Versuch entnommen, meist der Totwasserdruck, der ja bekanntlich beim Experiment immer tiefer liegt als der in der Theorie benützte statische Druck. Es wird hier über eine Methode berichtet, die rein theoretisch zu ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Experiment gelangt.

Zunächst wurden mit Hilfe der bekannten Methoden der konformen Abbildung Totwasserströmungen dargestellt, bei welchen längs der sich von der Kontur ablösenden freien Stromlinien die vorerst willkürliche Geschwindigkeit v_1 herrscht (Bild 1). Sie haben endliche Länge und münden (bei Symmetrie zur Staustromlinie) in zwei zur Anströmrichtung parallele Geraden ein. Diese geradlinigen Stromlinien können theoretisch nicht existieren, da auf ihrer einen Seite der konstante Totwasserdruck p_1 herrscht, der nach der Bernoullischen Gleichung der Geschwindigkeit v_1 entspricht, auf ihrer andern dagegen die Geschwindigkeit von v_1 nach dem im Unendlichen herrschenden Wert v_∞ geht. Dies schadet aber nichts, da sich im Bereich dieser Geraden ohnehin das Totwasser in Wirbel auflöst.

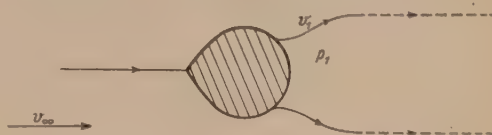


Bild 1. Die berechnete Strömungsform

Es wird nun nur angenommen, daß die Totwasserauflösung an der Strömung bis zum Beginn der Geraden nichts ändert. Man kann sich theoretisch überlegen, wie weit diese Annahme gut und berechtigt ist. Im Endeffekt wird darüber aber der Vergleich mit dem Experiment entscheiden. Die Folgen dieser Annahme sind wichtig. In ihr stecken nämlich Anfangsbedingungen für die turbulente Bewegung bei der Totwasserauflösung, mit denen man diese Vermischung weiter behandeln kann, um eine Beziehung für die noch freie Größe v_1 zu erhalten. In dem einfachen Fall, in dem die Vermischung so erfolgt, wie es etwa Tollmien¹⁾ annimmt, in dem also die „Nachströmung“ effektiv auf der ganzen Totwasserbreite erfolgt, reichen die Anfangsbedingungen in Verbindung mit der immer zu erfüllenden Energieforderung, daß die von der Verwirbelung verzehrte Energie gleich der vom Widerstand geleisteten ist, schon aus, um

$$v_1 = \sqrt{2} v_\infty \dots \dots (1)$$

festzulegen. Man kann dabei noch zeigen, daß sich dieser Wert höchstens etwas erhöht, der Druck im Totwasser also erniedrigt, wenn die Nachströmung nur im Mittel so erfolgt, wie wir es angenommen haben.

Mit dem Wert von v_1 nach (1) können nun, genau wie mit $v_1 = v_\infty$, rein theoretische Strömungen berechnet werden, und es zeigt sich, daß sie bei relativ breiten Konturen überraschend gut mit den Experimenten übereinstimmen. Bei der ebenen Platte senkrecht zur Anströmrichtung ergibt sich beispielsweise nicht nur mit $c_w = 1,79$ ein mit den Experimenten ($c_w = 1,80$ bis $2,01$) gut übereinstimmender Widerstandsbeiwert, sondern auch die berechnete Strömungsform stimmt ausgezeichnet überein mit dem zum Vergleich herangezogenen Experiment von F. Walter²⁾. Bei ihm wurde an der Vorderseite der Platte Farbe ausgesondert, die sich in die freien Strahlengrenzen fortpflanzt. Die berechneten freien Stromlinien verlaufen ganz innerhalb der Farbspuren (Bild 2). Die punktierten Linien stellen zum Vergleich die freien Stromlinien der Helmholtz-Strömung dar.

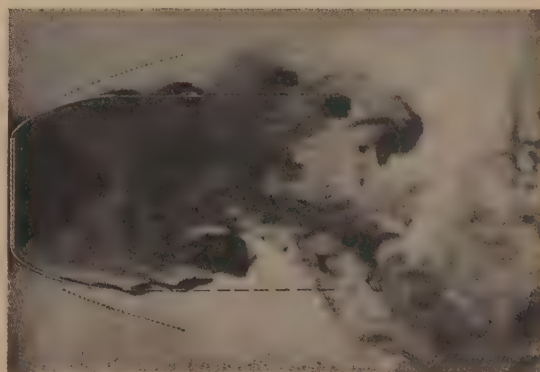


Bild 2. Vergleich mit dem Experiment bei der ebenen Platte senkrecht zur Anströmrichtung

¹⁾ W. Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 468–478.

²⁾ F. Walter: Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Strömungsformen hinter scharfkantigen Widerstandskörpern, sowie Beziehungen zum Widerstandsproblem. Berichte der Mathematisch-physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. XCII (1940), S. 139–234.

Auch die Kontur des Kreiszylinders wurde behandelt, wobei unter Heranziehung der Grenzschichttheorie das unterkritische Experiment in Widerstand und Druckverteilung sehr gut angenähert wurde. Beim überkritischen Experiment liegt der Totwasserdruck wesentlich höher als der (1) entsprechende Wert. Hier muß die Totwasserauflösung anders erfolgen, als zur Herleitung von (1) angenommen wurde. Man könnte aber vielleicht auch hier zu rein theoretischen Ergebnissen kommen, wenn man die Strahlvermischung noch genauer untersucht.

Ermittlung der Druckverteilung mittels Integralbedingungen

Von K. Oswatitsch in Stockholm

Zunächst sei nur die ebene, wirbelfreie, stationäre Strömung beliebiger Machzahl M behandelt. Verdichtungsstöße sind in der Näherung wirbelfreier Strömung, wie sie in Schallnähe oder an schlanken Profilen gerechtfertigt ist, zugelassen. Die abhängigen Veränderlichen müssen dann längs geschlossenen Kurven gewisse Bedingungen erfüllen, wie etwa diejenige, daß das Integral der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit oder der Normalkomponente der Stromdichte verschwinden muß. Aus solchen Integralbedingungen läßt sich grundsätzlich eine Strömung beliebig genau ermitteln, wenn beliebig viele Bedingungen aufgestellt werden können. Dies ist bei ebener Strömung der Fall.

Mit W , ϑ als Geschwindigkeitsbetrag und -winkel lautet die gasdynamische Gleichung und die Gleichung der Wirbelfreiheit:

$$(1 - M^2) \frac{1}{\varrho} \frac{\partial W}{\partial \Phi} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\varrho}{W} \frac{\partial W}{\partial \psi} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \Phi} = 0 \quad \dots \quad (1).$$

Folgende Bedingungen lassen sich nun erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} (f \sin(\nu \vartheta)) - \frac{\partial}{\partial \psi} (g \cos(\nu \vartheta)) = 0; \\ 2. \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} (f \cos(\nu \vartheta)) + \frac{\partial}{\partial \psi} (g \sin(\nu \vartheta)) = 0 \end{array} \right\} \dots \quad (2),$$

für beliebiges ν , wenn die Geschwindigkeitsfunktionen $f(W)$ und $g(W)$ gewisse Differentialbedingungen erfüllen, die sich nach Ausführen der Differentiation von (2) aus (1) ergeben. Durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf (2) folgt schließlich mit ds und γ als Bogenelement mit Richtungswinkel der geschlossenen Kurve für $F = Wf$ und $G = Wg$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \int [F \sin(\nu \vartheta) \sin(\vartheta - \gamma) - G \cos(\nu \vartheta) \cos(\vartheta - \gamma)] ds = 0; \\ 2. \quad \int [F \cos(\nu \vartheta) \sin(\vartheta - \gamma) + G \sin(\nu \vartheta) \cos(\vartheta - \gamma)] ds = 0 \end{array} \right\} \dots \quad (3),$$

wenn G und F folgende gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen:

$$W^2 \frac{d^2 G}{dW^2} - (1 - M^2) W \frac{dG}{dW} + (1 - \nu^2) (1 - M^2) G = 0; \quad W \frac{dF}{dW} = (1 - M^2) (F + \nu G) \quad (4).$$

Explizit lassen sich folgende Lösungen angeben für:

$$\nu = 0: F = \varrho W; \quad G = W, \quad \text{für } \nu = 1: -F = p + \varrho W^2; \quad G = p \quad \dots \quad (5),$$

was der Kontinuität, der Wirbelfreiheit und den Impulssätzen entspricht. Für $M=0$ lautet die Lösung von (4):

$$F = G = W^{\nu+1}, \quad \text{für beliebiges } \nu \quad \dots \quad (6).$$

Die physikalische Bedeutung von (3) für $\nu > 1$ ist noch unbekannt. Die Verallgemeinerung auf instationäre Strömung oder auf drei Dimensionen, wo Bedingungen auf Kurven und auf geschlossenen Flächen zu unterscheiden sind, ist nicht ohne weiteres möglich. Durch Abzählen der Variablen und der Bedingungen kann gezeigt werden, daß es im Raume für $M=0$ und $\nu > 1$ keine so einfache Bedingung wie Gl. (6) gibt.

Die Beispielrechnung steckt noch in den Anfängen. Mit einem einfachen 2-Parameteransatz erhält man folgende Maximalgeschwindigkeit an einem Kreiszylinder bei $M_\infty = 0,40$: $W_{max}/u_\infty = 2,26$ gegenüber einem Wert von 2,28 beim Janzen-Rayleigh-Verfahren 4. Näherung und 2,00 bei $M_\infty = 0$.

Berechnung von schallnaher Strömung an Profilen

Von *Tore R. Gullstrand* in Stockholm

Das Problem der Berechnung schallnaher Strömungen an symmetrischen, nicht angestellten Profilen ist mit Erfolg von Oswatitsch¹⁾,²⁾ behandelt worden. Eine Verallgemeinerung auf flache Flügel ist leicht und führt zu folgender Integralgleichung: $\left(U = \frac{u - u_\infty}{c^* - u_\infty}; U_0 = U(x, 0, z), \right.$

$U_p = \text{Lösung mittels Prandtl-Regel} \left. \right)$:

$$U_0 - U_{p0} = \frac{U_0^2}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U^2}{2} \frac{\eta^2 + (\xi - z)^2 - 2(\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + \eta^2 + (\xi - z)^2]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta \quad \dots \quad (1).$$

Durch einen Ansatz für U^2 in y -Richtung kann eine Integration durchgeführt werden. Dieser wird abweichend von¹⁾ und²⁾ als eine Summe von y -Funktionen mit Funktionen von x, z als Koeffizienten gemacht:

$$U^2 = U_0^2 f_1\left(\frac{y}{a}\right) + 2 U_0 \frac{dV_0}{dx} f_2\left(\frac{y}{a}\right) + \dots \quad \left. \right\} \dots \dots \dots (2).$$

mit:

$$f_1(0) = 1; f_1'(0); f_2(0) = 0; f_2'(0) = 1; \dots$$

a hat die Dimension einer Länge und könnte noch von x, z abhängen. Aus (1) und (2) folgt:

$$\left. \begin{aligned} U_0 - U_{p0} &= \frac{U_0^2}{2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0^2 \cdot F_1\left(\frac{\xi - x}{a}, \frac{\xi - z}{a}\right) d\xi d\zeta \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0 \frac{dV_0}{d\xi} F_2\left(\frac{\xi - x}{a}, \frac{\xi - z}{a}\right) d\xi d\zeta - \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Bei ebener Strömung fällt die Integration über ζ fort. Eine Integration ausgehend von U_p und Einsetzen dieser Größe im Integral führt wie das Janzen-Rayleigh-Verfahren nur bei unterkritischer Strömung zum Ziel. Bei lokalen Überschallgebieten erwies sich folgende Iteration als stark konvergent. Angenommen wird eine bestimmte, bei jedem Schritt gleichbleibende Stoßlage, nicht aber M_∞ . Aus einer angenommenen Geschwindigkeitsverteilung, welche in die Integrale eingesetzt wird, wird M_∞ und eine neue Geschwindigkeitsverteilung mittels (3) berechnet, mit der weiter iteriert werden kann.

Als Beispiel diene vorläufig das Profil NACA 0006, wobei sich sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchen und etwas kleinere Widerstände als bei²⁾ ergeben.

Die Methode soll bis $M_\infty = 1$ verwendet werden, wobei U_p nicht mehr mit M_∞ , sondern mit einer kleineren Machzahl zu linearisieren ist, damit es mit $M_\infty \rightarrow 1$ nicht über alle Grenzen wächst.

Bei angestellten Profilen gilt die Integralgleichung nicht mehr in gleicher Form, weil die unsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung die Randbedingung auf der x -Achse beeinflusst, weshalb dort Zusatzquellen anzubringen sind. Hingegen heben sich die Einflüsse auf die Geschwindigkeitsverteilung von oben und unten gerade auf.

Ausbreitung kugelförmiger Stoßwellen auf große Entfernung

Von *Fr. Wecken* in Haltingen

Zur Beschreibung kugelsymmetrischer Druckwellen, die in homogener Atmosphäre aus idealem Gas (mit $p \sim \rho^\gamma$) auswärts verlaufen, wird eine zugleich strenge und allgemeine Lösung der isentropischen Grundgleichungen gesucht. Um der Störungsfortpflanzung längs Charakteristiken (C^+ auswärts, C^- einwärts) Rechnung zu tragen, werden charakteristische unabhängige Variable eingeführt: $x = \text{const}$ auf C^+ , $y = \text{const}$ auf C^- . r, t, u (Stoffgeschwindigkeit), a (Schallgeschwindigkeit) genügen als Funktionen von x und y vier Differentialgleichungen, die gelöst werden durch eine Potenzreihenentwicklung nach $1/s$ und λ/s mit von x abhängigen Koeffizienten; dabei ist $s = y - x$, $\lambda = \ln(s/s_0)$, s_0 eine Integrationskonstante. Die Entwicklungs-

¹⁾ K. Oswatitsch: Z. angew. Math. Mech. XXX/1, 2 (1950), S. 17—24.

²⁾ K. Oswatitsch: Acta physica austr. IV/2, 3 (1950), S. 228—271.

koeffizienten sind rekursiv bequem zu ermitteln. Eine darin auftretende willkürliche Funktion $f(x)$ ermöglicht die Anpassung an vorgegebene Ausgangswerte. Die Anfangsglieder der Entwicklungen ergeben die bekannte akustische Lösung, wobei $x = a_0 t - r$, $s = 2r$ wird. Die Reihen konvergieren nur dort, wo die Wellenerregung hinreichend schwach ist, insbesondere für großes s ; sie liefern zunächst nur eine stetige isentropische Welle. Die Abweichung von der akustischen Lösung kommt besonders in einem Glied $\text{const} \cdot \lambda f'(x)$ zum Ausdruck, das die Koordinatenverzerrung bestimmt.

Für große s (oder r) werden u und a als Funktionen von r und t bei jeder Wahl von $f(x)$ mehrdeutig — ein Anzeichen für die tatsächliche Entstehung von Stoßwellen, wodurch die gewonnene bezüglich x und y eindeutige Lösung z. T. ungültig wird. Ist $\Delta = \frac{\partial(t, r)}{\partial(x, y)}$, so ist im „normalen“ Gebiet $\Delta > 0$, und Stoßwellen W_1, W_2, \dots beginnen an denjenigen Punkten S_1, S_2, \dots , wo auf der durch $\Delta = 0$ gegebenen Kurve E der (x, y) -Ebene t (und zugleich y) ein Minimum annimmt. Die Koordinaten der S_i sind formelmäßig angebar.

Der weitere Verlauf jeder Stoßwelle W wird durch gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmt. Werden Glieder dritter Ordnung in der Stoßstärke vernachlässigt, so ist auch hinter W die isentropische Lösung verwendbar. — Auf dem vorderen und hinteren Ufer (W^v, W^h) haben x, u, a verschiedene —, y, r, t gleiche Werte. — Die Stoßwellengleichungen lassen sich in erster überakustischer Näherung geschlossen integrieren und liefern die Beziehung

$$f(x^h) - f(x^v) = (x^h - x^v) \frac{f'(x^h) + f'(x^v)}{2},$$

die sich an der f' -Kurve als „Flächenregel“ deuten läßt. Da weiter

$$\frac{x^h - x^v}{f'(x^h) - f'(x^v)} \approx \frac{\gamma + 1}{2} \lambda$$

ist, läßt sich aus dem Verlauf von $f'(x)$ leicht die Entstehung und Entwicklung der auftretenden Stoßwellen, insbesondere auch ihr Verhalten bei $r \rightarrow \infty$, ablesen. Der Druckverlauf längs einer C -quer durch den Wellenzug ergibt sich aus der f' -Kurve durch affine Verzerrung, wobei gemäß der Flächenregel bestimmte Bögen durch Sehnen zu ersetzen sind. — Bei einer Explosion entstehen stets mindestens zwei Stoßwellen, bei einer Implosion mindestens eine.

Nach hinreichend langer Laufzeit nehmen Explosionswellen stets die von Dumond (1946) und anderen vorausgesetzte Sägezahnform an, jedoch tritt dies in vielen Fällen erst außerhalb des technisch interessierenden Bereiches ein, so daß die Anwendung des hier angegebenen Verfahrens gerechtfertigt erscheint, das mit nur mäßigem Rechenaufwand eine wesentlich genauere Beschreibung liefert.

An einem für die analytische Behandlung bequemen Beispiel ($f'(x) = \sin x$) lassen sich die Verhältnisse im einzelnen verdeutlichen.

Auf eine Arbeit von Whitham (Proc. Roy. Soc. 1950), worin er dasselbe Problem in ähnlicher Weise behandelt, wurde Vf. erst nach dem Vortrag aufmerksam.

Eine ausführlichere Veröffentlichung der Untersuchung ist beabsichtigt.

Zur Algebra des gegabelten Verdichtungsstoßes

Von W. Kofink in Karlsruhe

Für den einfachen Fall des gegabelten Verdichtungsstoßes, bei dem über das ganze Strömungsfeld dasselbe κ gilt und sowohl der Hauptstoß als auch der vordere Nebenstoß mit derselben dimensionslosen Anströmgeschwindigkeit ω_1 angeströmt werden, läßt sich für eine passende Unbekannte x eine Gleichung 6. Grades ableiten. Aus ihr erhält man alle am Gabelstoß interessierenden Größen. Bekannte Variable sind die drei

$$k = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad l = \text{ctg}^2 \alpha = M^2 - 1 = \frac{\omega_1^2 - 1}{1 - k \omega_1^2}, \quad m = \text{ctg}^2 \alpha_n = M_n^2 - 1 = \frac{\omega_{n1}^2 - 1}{1 - k \omega_{n1}^2},$$

die Unbekannte ist

$$x = \text{ctg}^2 \alpha_{na} = M_{na}^2 - 1 = \frac{\omega_{n1a}^2 - 1}{1 - k \omega_{n1a}^2};$$

die Variablen l, m, x laufen im Überschallbereich von 0 bis ∞ . Aus den beiden Gabelbedingungen von A. Weise, nämlich Druck- und Richtungsgleichheit im Abstrom hinter dem Hauptstoß und dem hinteren Nebenstoß, folgt zunächst eine Gleichung 10. Grades für x , aus

der sich zwei Paare trivialer Doppelwurzeln $x=0$ und $x=m$ (vorderer bzw. hinterer Nebenstoß ist Machsche Linie) herausheben, so daß eine Gleichung 6. Grades übrig bleibt:

$\sum_{n=0}^6 A_n(k, l, m) x^n = 0$. Die Koeffizienten A_n enthalten auch l und m höchstens in 6. Potenz.

In Sonderfällen reduziert sich der Grad weiter: 1.) für $\omega_1 = \omega_{max}$, $l = \infty$: Zerfall in eine Gleichung 4. Grades und das Quadrat einer Gleichung 1. Grades; 2.) senkrechter Hauptstoß, $l = m$, Zerfall in das Quadrat einer Gleichung 3. Grades in x , 2. Grades in l ; 3.) $x=0$, nichttriviale Lösung für vorderer Nebenstoß = Machsche Linie, Gleichung 4. Grades in m , 3. Grades in l ; 4.) $x=m$, nichttriviale Lösung für hinterer Nebenstoß = Machsche Linie, Gleichung 3. Grades in m , 2. Grades in l ; 5.) hinterer Nebenstoß ist senkrecht, Gleichung 4. Grades in m , Gleichung 2. Grades in l und lineare in x , nachdem l und m bestimmt sind. Die Lösungen der Sonderfälle sind die geeigneten Ausgangspunkte für die Lösung der allgemeinen Gleichung 6. Grades. Eine ausführliche Darstellung erscheint in den Annalen der Physik Bd. 9, Heft 2/4, 1951. (Aus dem Inst. f. Gasströmungen der T. H. Stuttgart.)

Interferometrische Messung von Grenzschichten an ebenen Platten bei Überschallgeschwindigkeit

Von R. Ladenburg in Princeton, N. J.

Mittelst eines Zehnder-Mach-Interferometer wurde die Dichteverteilung von Grenzschichten an ebenen Platten in einem intermittierenden Windkanal bei der Machzahl $M=2.3$ gemessen. Durch Änderung des Druckes im Reservoir konnte die Dichte und die Reynoldssche Zahl Re in der Meßkammer in weiteren Grenzen geändert werden. Da Druck und Temperatur im Reservoir bekannt sind und da der Druck innerhalb der Grenzschicht konstant ist, konnte die Temperaturverteilung in der Grenzschicht aus der Dichteverteilung des Gasgesetzes berechnet werden. Die Geschwindigkeitsverteilung wurde im Fall laminarer Strömung aus der Temperaturverteilung und der gemessenen Oberflächentemperatur der Platte nach einer von L. Crocco¹⁾ herrührenden Beziehung für die Prandtl'sche Zahl 0.72 berechnet und mit den Resultaten der Croccoschen Theorie¹⁾ verglichen. Mit wachsendem Abstand x von der Schneide der Platte weicht die gemessene Dichteverteilung und die berechnete Geschwindigkeitsverteilung bei Re zwischen 3 und $9 \cdot 10^5$ mehr und mehr von der theoretischen Verteilung für laminare Strömung ab und nähert sich der Verteilung für turbulente Strömung, wie sie für $Re > 2 \cdot 10^6$ erhalten wird. Die vorläufigen Resultate lassen sich durch transversale Ansteckung („transversal contamination“) nach Charters-Liepmann²⁾ deuten, die von der turbulenten Grenzschicht an den Wänden der Meßkammer herrührt, in die die Ränder der ebenen Platte hineinragen. Die Untersuchungen sind noch nicht abgeschlossen und werden fortgesetzt.

Die ausgebildete Kanalströmung in einem rotierenden System

Von H. Ludwig in Göttingen

Es wurde die ausgebildete Strömung in einem Kanal mit quadratischen Querschnitt untersucht, der um eine Achse rotierte, die senkrecht zur Kanalachse steht. Dabei zeigte sich, daß man bei genügend hoher Rotationsgeschwindigkeit des Kanals das Strömungsfeld in zwei Gebiete aufteilen kann. Nämlich in eine Grenzschichtströmung an denjenigen Seitenwänden des Kanals, die in Richtung der Normalen zur Rotationsachse verlaufen, und in eine Kernströmung, die das übrige Gebiet des Kanals ausfüllt. Dabei sind in den Gleichungen für die Grenzschichtströmung nur die Coriolis-, Zähigkeits- und Druckkräfte wesentlich, während man bei der Kernströmung für eine erste Näherung nur die in Kanalrichtung fallende Komponente der Corioliskraft und das Druckgefälle zu berücksichtigen braucht. Unter diesen Vereinfachungen und unter Berücksichtigung der Anschlußbedingungen zwischen den beiden Gebieten konnte für laminare Strömung das Strömungsfeld und der Reibungsbeiwert für den Kanal ausgerechnet werden. Es zeigte sich dabei, daß der Reibungswiderstand in einem Kanal in einem rotierenden System sich ganz erheblich von den Werten unterscheidet, die für die Kanalströmung im ruhenden System bekannt sind. Die erhaltene Formel für den Reibungsbeiwert konnte noch dadurch verbessert werden, daß auch das Reibungsglied in der Gleichung für die Kernströmung mitberücksichtigt wurde. Durch eine numerische Integration der Differentialgleichung für die Kernströmung

¹⁾ L. Crocco jr.: Monografie Scientifiche di Aeronautica, No. 3 (1946).

²⁾ A. C. Charters: NACA TN 891 (1943).

wurde dann noch der Einfluß des Beschleunigungsgliedes auf den Reibungswert abgeschätzt, wobei sich ergab, daß dieser Einfluß im allgemeinen nur gering ist.

Zur Prüfung der abgeleiteten Formeln für den Reibungsbeiwert wurden Druckabfallmessungen in einem schraubenförmigen Kanal vorgenommen, der um die Schraubenachse rotierte. Dabei ergab sich in dem *Re*-Zahlbereich, in dem die Strömung noch laminar war, eine sehr gute Übereinstimmung mit den Rechnungen. Aber auch in dem *Re*-Zahlbereich, in dem die Strömung bei der Messung bereits turbulent war, stimmten die gemessenen Reibungsbeiwerte noch gut mit denen aus der Rechnung für laminare Strömung ermittelten überein. Der Grund für diese ungewöhnliche Tatsache liegt darin, daß zunächst nur der Kern turbulent wird, was keinen großen Einfluß auf den Druckabfall hat, da ja bei der Kernströmung die Wirkung der Zähigkeit und damit der Turbulenz nur gering ist. Ein wesentlicher Einfluß der Turbulenz ist erst dann zu erwarten, wenn auch die Grenzschicht an den Seitenwänden turbulent wird, was aber erst bei erheblich höheren *Re*-Zahlen eintritt als das Turbulentwerden der Kanalströmung im nicht rotierenden System. Die Messungen geben ferner Aufschluß über den Reibungsbeiwert in denjenigen Gebieten, in denen die Voraussetzungen der Rechnung nicht mehr gelten.

Zur rationellen Berechnung der turbulenten Reibungsschicht mit Druckgradient an rauen Wänden

Von *N. Scholz* in Braunschweig

Für die Grenzschichtströmung längs einer Wand ohne Druckgradient (ebene Platte) sind die turbulenten Reibungsschichtgrößen sowohl bei glatter als auch bei rauher Wand durch die Arbeiten von L. Prandtl [1] und L. Prandtl u. H. Schlichting [2] für beliebige Reynoldssche Zahlen und beliebige Rauheitsgrößen als bekannt anzusehen. Und zwar kann hiernach das turbulente Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht bei glatter und rauher Wand durch ein und dasselbe universelle Geschwindigkeitsgesetz beschrieben werden (logarithmisches Geschwindigkeitsverteilungsgesetz der Grenzschicht).

Es läßt sich nun zeigen, daß die bisher zur Anwendung kommenden rationellen Verfahren zur Berechnung der turbulenten Reibungsschicht mit Druckgradient bei glatter Wand aus den bekannten Verhältnissen an der ebenen Platte bzw. aus der Rohrströmung abgeleitet werden können (vgl. hierzu H. Schlichting [3]). Es liegt daher nahe, für die turbulente Grenzschicht an der rauhen Wand durch sinngemäße Übertragung der Ergebnisse der rauhen ebenen Platte ganz analoge Beziehungen aufzustellen, wie sie für die glatte Wand mit Erfolg angewandt worden sind. Dieses Vorgehen soll im folgenden in Form einer Gegenüberstellung der Formelsysteme für glatte und rauhe Wand kurz angedeutet werden.

Das universelle logarithmische Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für die Grenzschicht an der ebenen Platte lautet:

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-bottom: 5px;">glatt</div> $\frac{u(y)}{v_*} = 5,75 \log \frac{v_* y}{\nu} + 5,56 \dots (1a);$	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-bottom: 5px;">rauh</div> $\frac{u(y)}{v_*} = 5,75 \log \frac{y}{k} + 8,48 \dots (1b).$
--	---

($u(y)$ = Geschwindigkeit in der Grenzschicht; $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ = Wandschubspannungsgeschwindigkeit; ν = kinematische Zähigkeit; k = Korngröße der „Göttinger Sandrauhigkeit“). Zur rechnerischen Vereinfachung können diese Gesetze durch Potenzgesetze angenähert werden von der Form:

$\frac{u(y)}{v_*} = C \left(\frac{v_* y}{\nu} \right)^n \dots (2a);$	$\frac{u(y)}{v_*} = C \left(\frac{y}{k} \right)^n \dots (2b).$
---	---

Schreibt man diese Gesetze für den Rand der Reibungsschicht, also für $y = \delta$: $u = U$ auf, so erhält man die bekannte Form des Potenzgesetzes für die Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht (z. B. 1/7-Potenzgesetz):

$$\frac{u(y)}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^n \dots (3).$$

Der Exponent n ist hierbei für glatte Wand eine Funktion der Reynoldsschen Zahl $U\delta/\nu$ bzw. für rauhe Wand eine Funktion der relativen Rauigkeit k/δ . Die Konstanten C und n können so bestimmt werden, daß die Impulsverlustdicke δ und die Wandschubspannung τ_0 für das exakte Gesetz (1) und die Näherung (2) übereinstimmen. Da wir letztlich für die Grenzschicht auch nur die beiden Kenngrößen δ und τ_0 berechnen wollen, bedeutet die Verwendung des Potenzgesetzes (2) gegenüber dem logarithmischen Gesetz (1) überhaupt keine Vernachlässigung.

Für die Wandschubspannung können aus Gl. (2) die Ansätze abgeleitet werden:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\alpha}{\left(\frac{U\vartheta}{\nu}\right)^a} \dots \dots \dots (4a);$$

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\alpha}{\left(\frac{\vartheta}{k}\right)^a} \dots \dots \dots (4b).$$

Diese Ansätze werden für die Grenzschicht mit Druckgradient übernommen, wobei die Hypothese zugrunde liegt, daß für ein Grenzschichtprofil mit gleichem $U\vartheta/\nu$ bzw. gleichem ϑ/k auch die gleiche Wandschubspannung vorhanden ist wie an der ebenen Platte (diese Annahme ist für glatte Wand bei beschleunigter und mäßig verzögerter Strömung experimentell als gesichert anzusehen). Zur Berechnung der Impulsverlustdicke ϑ kann nun die Impulsgleichung für die Grenzschicht mit Druckgradient herangezogen werden. Eine geschlossene Integration der Impulsgleichung gelingt durch Einführung der Ansätze (4) für die Wandschubspannung und eines konstanten Wertes für das Grenzschichtdickenverhältnis $H = \delta^*/\vartheta$ (vgl. [3]). Das Ergebnis erhält die Form:

$$\left(\frac{U\vartheta}{\nu}\right)^a \vartheta = \frac{(1+a)\alpha}{U^c} \int_0^x U^c dx \quad (5a);$$

$$\left(\frac{\vartheta}{k}\right)^a \vartheta = \frac{(1+a)\alpha}{U^c} \int_0^x U^c dx \quad (5b),$$

wobei die auftretenden Konstanten a , α und c Funktionen von $U\vartheta/\nu$ bzw. ϑ/k sind, die sich aus den Ergebnissen für die ebene Platte nach [1] und [2] ermitteln lassen.

Wir vermerken hier noch, daß sich durch ähnliche Analogiebetrachtungen zwischen glatter und rauher Wand auch die Näherungsverfahren zur Bestimmung eines turbulenten Ablösungspunktes auf die rauhe Wand übertragen lassen. Ferner ist erwähnenswert, daß der Übergang von der ausgebildeten Rauheitsströmung zur hydraulisch glatten Grenzschicht mit dem vorliegenden Verfahren zwangsläufig erhalten wird. Als Beispiel wurde bisher der ebene Diffusor bei hydraulisch glatter und verschieden rauher Wand berechnet.

Literatur

- [1] L. Prandtl: Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, IV. Lieferung (1932).
- [2] L. Prandtl u. H. Schlichting: Das Widerstandsgesetz rauher Platten. Werft Reed. Hafen, XV. Jahrg., (1934), S. 1.
- [3] H. Schlichting: Grenzschichttheorie, Karlsruhe 1951.

Thermodynamische Vorgänge in turbulenten Reibungsschichten

Von F. Schultz-Grunow in Aachen

Es gibt zwei Beobachtungsergebnisse, die sich mit den üblichen Anschauungen über den Wärmeübergang nicht erklären lassen. Es sind dies einmal die eigenartige Wirkungsweise des Wirbelrohres, Luft in einen erhitzten und unterkühlten Teil zu trennen¹⁾, ²⁾, und dann die überraschend hohe Untertemperatur im Windschatten eines bei höherer Machscher Zahl quer angeblasenen Kreiszylinders³⁾. Man hat hier Wärmeübertragung von niedriger zu höherer Temperatur, was dem 2. Hauptsatz zu widersprechen scheint.

Es wurde gezeigt⁴⁾, daß sich diese Effekte durch einen thermodynamischen Vorgang erklären lassen, der bei turbulenter Bewegung in einem durch Feldkräfte, hier durch Zentrifugalkräfte, geschichteten Gas auftritt. Er beruht darauf, daß die Turbulenz jede polytrope Schichtung in eine adiabate verwandelt als Resultat einer vollständigen Durchmischung. Insbesondere wird im Bereich des Polytropenexponenten $1 < \kappa < k$ bei dieser Mischung Wärme von niedrigerem auf höheres Temperaturniveau transportiert, was bereits W. Schmidt⁵⁾ an Hand von Messungen in der Atmosphäre, die durch die Schwerkraft geschichtet ist, bemerkt hat. Nach Ertel⁶⁾ arbeitet hierbei die Turbulenz als Kältemaschine, die Luftteilchen durchlaufen bei ihrer turbulenten Bewegung einen Jouleschen Kreisprozeß. Die Wärmemengen werden also nicht bei den Temperaturen der Herkunftsorte der Luftteilchen, wie etwa an einer geheizten parallel angeströmten Platte, sondern bei einer durch adiabate Kompression im Kraftfeld erhöhten Temperatordifferenz ausgetauscht, was auf eine Intensivierung des Wärmedurchgangs durch Schichtung schließen läßt.

¹⁾ G. Ranque: J. Physique Radium (7) 4 (1933), S. 112.

²⁾ R. Hilsch: Z. Naturforsch. 1 (1946), S. 208.

³⁾ E. Eckert und W. Weise: Forsch.-Arb. Ing.-Wes. 13 (1942), S. 246.

⁴⁾ F. Schultz-Grunow: Kältetechnik 2 (1950), S. 273.

⁵⁾ W. Schmidt: Der Massenaustausch in freier Luft. Hamburg 1925, S. 18.

⁶⁾ H. Ertel: Meteorol. Z. 56 (1939), S. 109.

Die Schichtung durch Zentrifugalkräfte ist auffallend intensiv, im Wirbelrohr von 5 mm Durchmesser entspricht sie 6000 m und im Windschatten entspricht sie 5000 m atmosphärischer Höhendifferenz. Allgemein bestehen an zwei Vergleichsorten im Zentrifugal- und Schwerfeld gleiche Temperaturdifferenzen, wenn die Zentrifugalbeschleunigung gleich der mit dem Maßstabsverhältnis vervielfachten Erdbeschleunigung ist.

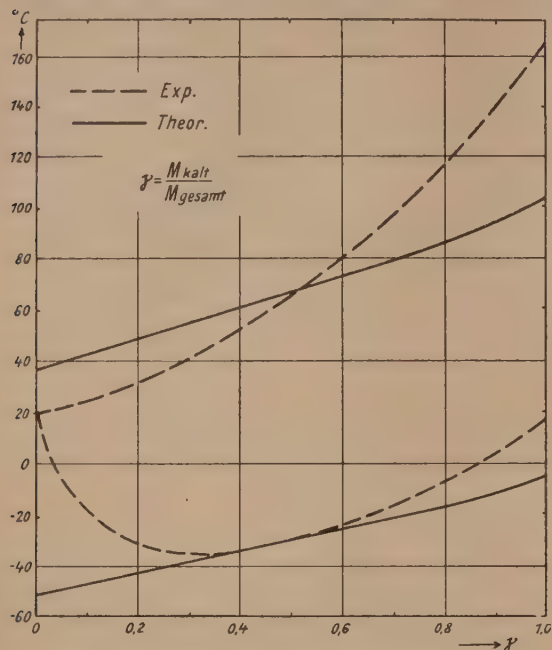


Bild 1. Vergleich der theoretisch und experimentell am Wirbelrohr erhaltenen Temperaturen

mung treten, so daß durch einen wärmeren turbulenten Luftstrom eine kältere Wand gekühlt werden kann und ebenso das Umgekehrte möglich ist.

Aus diesen Vorstellungen heraus läßt sich mit Aussagen über die Strömung eine Theorie des Wirbelrohres entwickeln, die auch quantitativ mit den bisher vorliegenden Temperaturmessungen¹⁾ übereinstimmt, was Bild 1 veranschaulicht. Die im Wirbelrohr erzeugte Kalt- und Warmlufttemperatur ist dort über dem Verhältnis der Kalt- zur Gesamtluftmenge aufgetragen so, wie sie sich theoretisch und experimentell ergibt. Die Diskrepanzen rühren von einer unrichtigen Extrapolation der experimentell ermittelten Kaltlufttemperatur auf $\gamma=0$ her und auch daher, daß im Experiment nicht zwischen Gas- und Wandtemperatur unterschieden wurde²⁾.

Zur Berechnung der Drucktendenz bei Wärmezufuhr innerhalb einer isothermen Atmosphäre von konstanter Grundgeschwindigkeit

Von H. Stümke in Denzlingen (Baden)

Eine reibungsfreie Atmosphäre mit der konstanten Temperatur T und der konstanten Grundgeschwindigkeit U parallel zur x -Achse einer x, y -Ebene, die mit der Winkelgeschwindigkeit $\lambda/2$ um die z -Achse rotiert und als Ersatz der Erdoberfläche dient, besitzt die ungestörte Druckverteilung

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{1}{b} \left(z + \frac{\lambda U}{g} y \right)},$$

wobei $b = \frac{RT}{g}$; $R = c_p - c_v$ ist. Eine Wärmezufuhr in dieser Atmosphäre macht sich als Störfunktion in der Zustandsgleichung^{3), 4)} bzw. in der Kontinuitätsgleichung⁵⁾ bemerkbar. Zur Berechnung der daraufhin einsetzenden Drucktendenz (= lokale Druckänderung p_l) eignet sich die Methode der „mittleren“ Zustandsänderungen⁴⁾, bei der die wirklichen Beschleunigungen

¹⁾ R. Hilsch: Z. Naturforsch. 1 (1946) S. 208.

²⁾ Ausführliche Veröffentlichung demnächst in Forsch.-Arb. Ing.-Wes.

³⁾ H. Stümke: Zustandsänderungen durch großräumige Wärmezufuhr im Innern einer anfänglich ruhenden Atmosphäre. Erscheint in der Met. Rundschau.

⁴⁾ H. Stümke: Theorie der Weiterentwicklung von stabilen atmosphärischen Druckfeldern. Met. Rundschau 3 (1950), S. 241–243 und 4 (1951), S. 7–13.

⁵⁾ H. Stümke: Rationelle Behandlung der Konvektion bei der angenäherten Berechnung der Wetterentwicklung. Erscheint in der Met. Rundschau.

relativ zur rotierenden Erde durch die Variation des „geostrophischen“ Windes (Gleichgewichtswindes) nach der Zeit ersetzt werden (quasigeostrophische Rechnung). Bei kleinen Störungen lauten dann die dynamischen Gleichungen

$$\lambda P v = -U \varrho_t - \frac{p_t y}{\lambda}; \quad \lambda P u = -\frac{p_t x}{\lambda}; \quad g \varrho_t = -p_t z.$$

Die Zustandsgleichung wird

$$p_t + v P_y + w P_z - \frac{\kappa P}{P} (\varrho_t + v P_y + w P_z) = S_1$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\varrho_t + P u_x + (P v)_y + (P w)_z = S_2.$$

Große Buchstaben bezeichnen hier Größen des Grundzustandes, kleine die additiv hinzutretenden Störungen. S_1 und S_2 sind Störfunktionen. Elimination von u, v, w, ϱ_t und geeignete Transformationen führen zu der elliptischen Differentialgleichung

$$\Phi_{XX} + \Phi_{YY} + \Phi_{ZZ} - \frac{1}{4} \Phi = Q(X, Y, Z),$$

wobei Φ die transformierte Drucktendenz, Q eine Störfunktion bedeutet. Bei ebenem Erdboden und verschwindender Wärmezufuhr am Boden lautet die Randbedingung

$$\lim_{Z \rightarrow 0} [\Phi A + \Phi_z] = 0 \quad \text{mit} \quad A = \frac{2 - \kappa}{2\kappa\sqrt{1 + \mu^2}}; \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}; \quad \mu = \sqrt{\kappa - 1} \frac{U}{\sqrt{\kappa g b}}.$$

Die Forderung, daß die Drucktendenz im Unendlichen absolut bzw. relativ zum ungestörten Druck verschwindet, führt zu den beiden Regularitätsbedingungen

$$\lim_{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \rightarrow \infty} \left[\Phi \cdot e^{\frac{-1}{2\sqrt{1 + \mu^2}}(Z + \mu Y)} \right] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \rightarrow \infty} \left[\Phi \cdot e^{\frac{1}{2\sqrt{1 + \mu^2}}(Z + \mu Y)} \right] = 0.$$

Die Lösung dieser Randwertaufgabe läßt sich mit Hilfe der Greenschen Funktion herstellen, die Vf. in seiner Dissertation angegeben hat⁶⁾. Der Eindeutigkeitsbeweis für die Lösung ist nicht trivial. Man muß dabei wesentlich die Tatsache benutzen, daß κ größer als 1 ist.

Im Spezialfall des ebenen Problems (Ebene senkrecht zur Grundströmung) stimmt die behandelte Aufgabe formal mit einem Ansatz zur Berechnung kleiner Gleichgewichtsstörungen überein, der von L. Prandtl für eine anfänglich ruhende Atmosphäre gegeben wurde⁷⁾, sich aber auch sinngemäß auf eine strömende Atmosphäre übertragen läßt.

In der Energiebilanz tritt gegenüber dem Fall der anfangs ruhenden Atmosphäre³⁾ als neues Glied ein meteorologisch wichtiger Ausdruck für die Änderung der kinetischen Energie auf.

Zur Theorie der Strömungslager

Von G. Heinrich in Wien

Als Strömungslager soll ein Lager bezeichnet werden, bei dem das Schwimmen des Zapfens durch Einpressen von Flüssigkeiten oder Gasen in den Lagerspalt erzwungen wird.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse beim Strömungsspurlager für einseitige Abstützung (Bild 1). Die Flüssigkeit oder das Gas strömt durch Kapillaren, die in einem Kranz angeordnet sind, dem Lagerspalt zu und fließt dann durch den Spalt radial nach außen. Für die Druckverteilung im Tragfilm gilt bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte bei inkompressibler Strömung: $\Delta p = 0$. Beim Austritt aus dem Lager muß der Außendruck p_a herrschen (erste Randbedingung); die durch die Kapillaren zuströmende Flüssigkeitsmenge ist gleich der Quellung der Filmströmung an der Einmündung (zweite Randbedingung). Dadurch ist bei gegebener Spaltdicke δ Druckverteilung und abgestützter Axialschub S bestimmt. Als Sicherheit gegen

Berühren wird $\vartheta = \frac{S_{max}}{S}$ eingeführt. (S_{max} = Axialschub für $\delta = 0$.) Es ergibt sich: $\vartheta = \frac{p_s - p_a}{p_i - p_a}$

(p_s = Speisedruck, p_i = Einmündungsdruck.) δ wählt man etwa 0,1 mm, der Düsenkranzradius kann nach dem Minimum der Pumpenleistung bei gegebener Tragkraft und Sicherheit berechnet werden. Die Kapillarabmessungen folgen aus der gewünschten Sicherheit. Der zum

⁶⁾ H. Stümke: Rotationssymmetrische Gleichgewichtsstörungen in einer isothermen Atmosphäre. Z. Geoph. 16 (1940), S. 127–149.

⁷⁾ L. Prandtl: Beiträge zur Mechanik der Atmosphäre (Mémoire présenté à l'Association Météorologique de l'U. G. G. I. Edimbourg Septembre 1936). Paris 1939.

Minimum gehörige optimale Pumpendruck ergibt sich zu: $(p_s - p_a)_{opt} = 1,757 \cdot \zeta \cdot p_m$ (p_m = mittlerer Lagerdruck). Bei turbulentem Zustrom durch die Drosselröhrchen ändert sich nur die Zustrombedingung, minimale Pumpenleistung und optimaler Pumpendruck bleiben gleich. Das Reibungsmoment ergibt sich zu: $M_R = - \frac{\pi \eta r_a^3 c_{u,a}}{2 \delta}$ (η = dynamische Zähigkeit, r_a = Zapfenradius, $c_{u,a}$ = Umfangsgeschwindigkeit).

Beim doppelseitigen Spurlager (Bild 2) ergibt sich der Stützdruck aus der Differenzwirkung beider Lager. Wir setzen die beiden Spaltdicken: $\delta_1 = \delta_m (1 + \varepsilon)$ und $\delta_2 = \delta_m (1 - \varepsilon)$. ($2 \delta_m$ = gesamtes Lagerspiel.) $1/\varepsilon$ ist ein Maß für die Sicherheit gegen Berühren, wenn man $\varepsilon \ll 1$ voraussetzt. Der Stützdruck S ist dann proportional zu ε (erste Näherung). $p'_m = \frac{p_m}{p_a \cdot \varepsilon}$ ist eine

Lagerkennzahl. Bei gegebenem p_m und ε existiert ein Minimum der Pumpenleistung sowohl nach der Stärke der Drosselung im Zustrom, als auch nach dem Düsenkranzdurchmesser; dazu gehört ein optimale Pumpendruck. Bei turbulentem Zustrom liegt das Leistungsminimum etwa um $1/3$ tiefer als bei laminarem.

Das zylindrische Traglager (Bild 3) besitzt ein oder zwei Düsenkränze. Die Exzentrizität des Zapfensmittels gegen das Schalenmittel a_0 soll schon bei ruhendem Zapfen klein sein gegenüber dem mittleren Lagerspalt δ_m . Dann ist $\frac{1}{a'_0} = \frac{\delta_m}{a_0}$ ein Maß für die Sicherheit gegen Berühren. Die

Druckverteilung bei ruhendem Zapfen ist durch die Gleichung: $\nabla \cdot (\delta^3 \nabla p) = 0$ mit den zwei erwähnten Randbedingungen zu ermitteln. Bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in a'_0 ergibt sich wieder: $\Delta p = 0$; dies läßt sich für den vorliegenden zweidimensionalen Fall leicht lösen. Es existiert wieder ein Leistungsminimum nach der Stärke der Zuflußdrosselung und nach dem Verhältnis von Lagerlänge zu Zapfendurchmesser, das bei turbulentem Zustrom etwa um $1/3$ kleiner ausfällt als bei laminarem; dazu gehören wieder optimale Speisedrucke.

$p_m = \frac{p'_m}{p_a \cdot a'_0}$ stellt eine Lagerkennzahl dar. Bei rotierendem Zapfen ist der geometrische Ort des Zapfensmittels für variable Drehzahl ein Kreis mit dem Durchmesser a_0 .

Bei kompressibler Tragflüssigkeit kann man wegen der Konstanz der Enthalpie mit dem Boyle-Mariotteschen Gesetz rechnen. Man erhält dann für die Druckverteilung im kompressiblen Tragfilm die Differentialgleichung: $\nabla \cdot \left[\delta \cdot p \left(\frac{1}{2} \bar{c}_u - \frac{\delta^2}{12} \eta \nabla^2 p \right) \right] = 0$. (\bar{c}_u = Geschwindigkeitsvektor der an den Film angrenzenden beweglichen Wand.)

Für ruhenden, zylindrischen Tragzapfen erhält man daraus, bis auf Glieder höherer Ordnung in a'_0 :

$$\frac{1}{p} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Durch die Transformation $p = \sqrt{P}$ geht sie in $\Delta P = 0$ über. Ebenso lassen sich die Randbedingungen durch P ausdrücken. Das Minimum der isothermen Kompressorleistung bei vorgegebener

Kennzahl $p'_m = \frac{p_m}{p_a \cdot a'_0}$ liefert alle optimalen Größen in Abhängigkeit von p'_m . Bild 4 zeigt das Minimum der Kompressorleistung in Abhängigkeit von p'_m , für inkompressible (strichliert) und kompressible Tragflüssigkeit bei laminarem und turbulentem Zustrom in einem einheitlichen dimensionslosem Maßstab.

Literatur

- G. Heinrich: Über Strömungslager, M. und W., 4. Jahrg., Heft 11 und 12. Wien 1949.
G. Heinrich: Das zylindrische Strömungslager, M. u. W. 5. Jahrg., Heft 8. Wien 1950.
G. Heinrich: Das Strömungs-Spurlager, M. u. W. 6. Jahrg., Heft 4 und 5. Wien 1951.
G. Heinrich: Das aerodynamische Lager, M. u. W. im Druck.

Ausführliche Berichte über die Vorträge:

S. Bergman, Cambridge, Mass.: Integraloperatoren in der Gasdynamik und

W. Tollmien, Göttingen: Fortschritte der Turbulenzforschung

werden in einem späteren Heft der Zeitschrift erscheinen.

Ein Referat des Vortrages:

H. Söhngen, Darmstadt: Luftkräfte an schwingenden Gittern

ist nicht eingegangen. Ein ausführlicher Bericht wird im Ingenieurarchiv erscheinen.

Durch ein Versehen wurden die Abbildungen zu dem Referat G. Heinrich: „Zur Theorie der Strömungslager“ im Heft 8/9 dieses Jahrganges, Seite 295/296 nicht mit abgedruckt. Wir bitten, dieses Blatt mit den zu der genannten Arbeit gehörenden Figuren hinter Seite 296 des vorigen Heftes einzufügen.

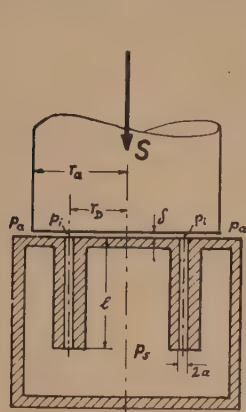


Bild 1

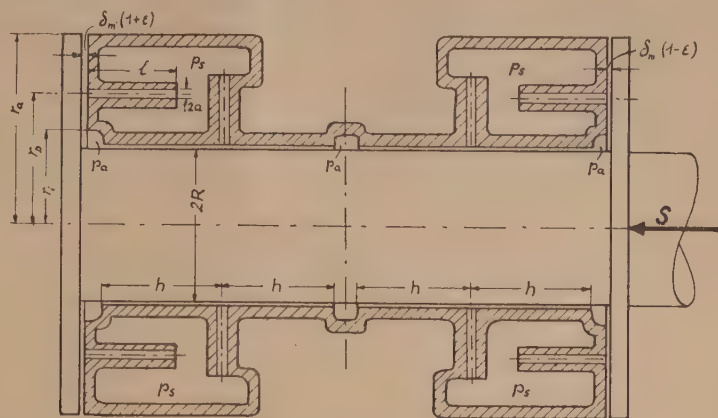
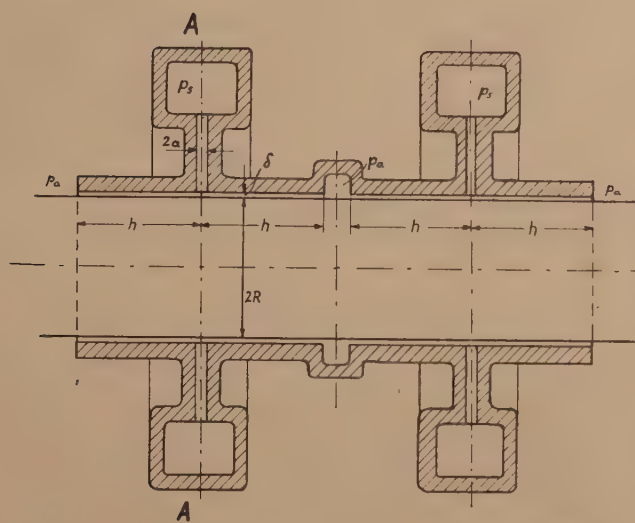


Bild 2



Schnitt A-A

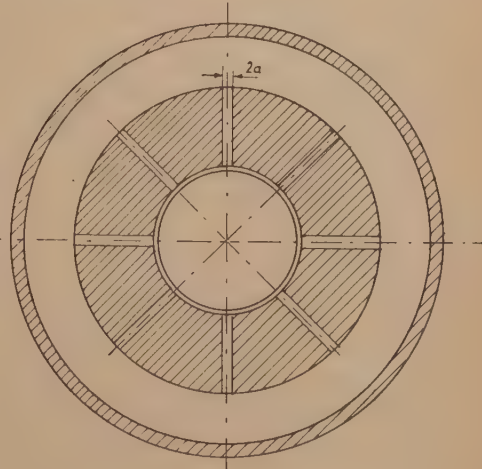


Bild 3

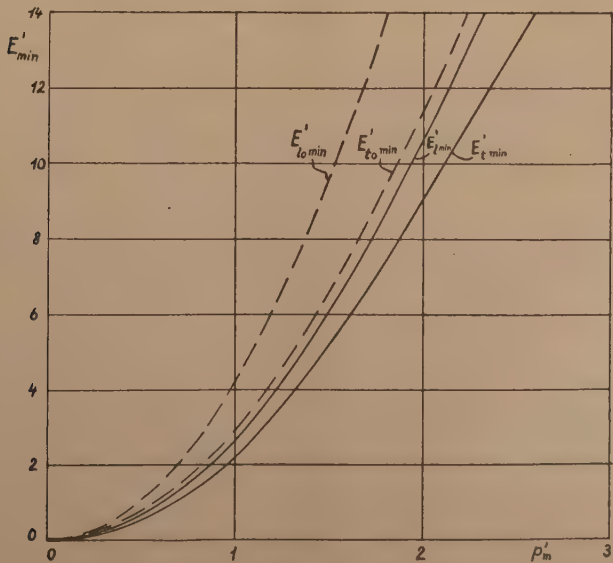


Bild 4

KLEINE MITTEILUNGEN

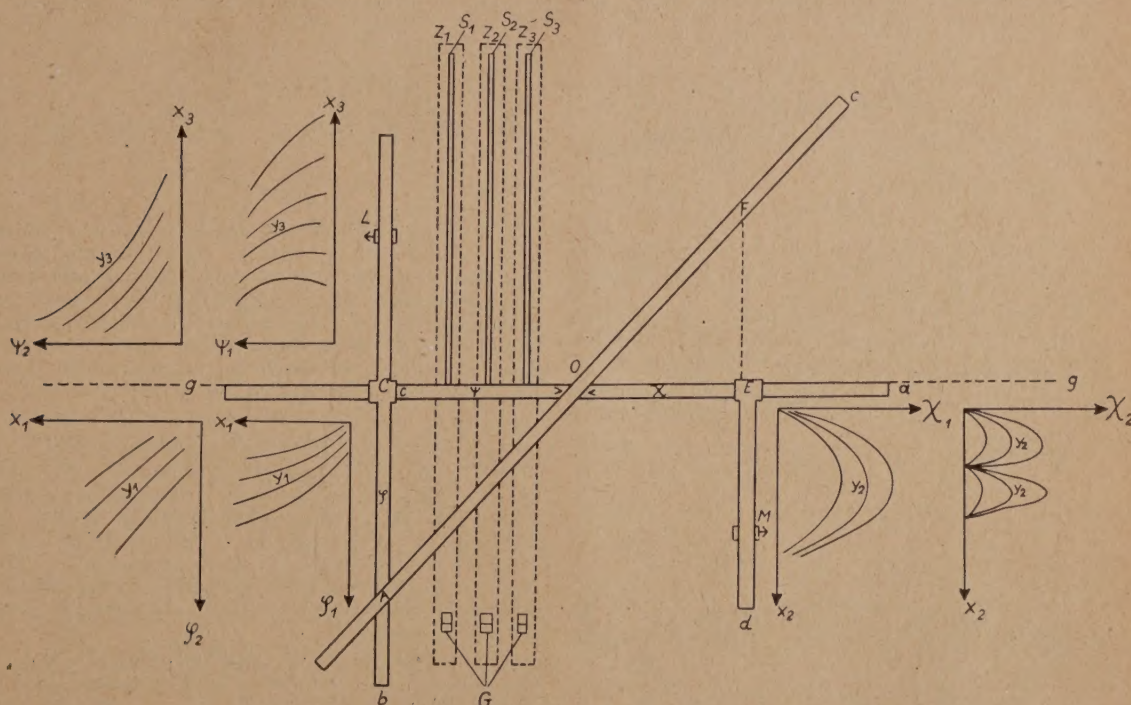
Eine einfache Vorrichtung zur Addition von Produkten.

$$\text{Schlüsselgleichung: } \Omega = \sum \frac{\varphi \cdot x}{\psi}$$

Das Folgende stellt einen Versuch dar, die bekannte Zeichenmethode für diese Schlüsselgleichung weitgehend zu „mechanisieren“. Statt der Zeichnung werden an Kurvenscharen einstellbare Lineale verwendet, die ein Spaltstück vom Betrage des Summanden begrenzen, um welches dann eine Zunge verschoben

bis E um $EF = \omega$ verschoben, bei negativem Produkt ist bei E einzustecken und durch Hinaufführen des Griffels die Zunge in umgekehrter Richtung zu verschieben. Der Betrag der Verschiebung ist unten an der Zunge in einem Fenster G abzulesen. Bei Addition in mehreren Spalten lassen sich beliebige Teilsummen bilden. Kann man bestimmten Spalten bestimmte χ -Kurven zuordnen, so wird alles wesentlich einfacher (z. B. harmonische Analyse).

Die erreichbare Genauigkeit hängt vom Maßstab und vom Material ab. Für rasche Überslagsrech-



werden kann. (Keine Zwischenablesung, nur Endresultat.)

Die Vorrichtung zum Multiplizieren besteht aus den vier Linealen a, b, c, d . Lineale b und d in C bzw. E rechtwinklig zu a , auf a verschiebbar. Lineal c um O auf a drehbar. Mit $OC = \psi$, $AC = \varphi$, $OE = \chi$ wird

$EF = \omega = \frac{\varphi \cdot \chi}{\psi}$. Die Werte von $\varphi_i(x_1, y_1)$, $\chi(x_2, y_2)$,

$\psi(x_3, y_3)$, wo $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ unabhängige Variable sind, könnten etwa aus Tabellen entnommen und auf Linealskalen eingestellt werden, am besten aber benutzt man direkt Kurvenscharen für die φ -, χ -, ψ -Funktionen zur Einstellung. (Anlegen der betr. Lineale an die Punkte x, y der Kurven, hierzu auch verschiebbare Einstellmarken L und M auf b bzw. d .) Lineal a ist längs der Geraden g (Führung) verschiebbar, um die Einstell-Lineale an die Kurvenpunkte zu bringen, die dafür oberhalb und unterhalb von g gezeichnet sind. Nach Möglichkeit wird man auch Kurvenscharen auf den Linealen selbst anbringen. (Gelegentlich kann auch $\chi(c, a)$ als Unabhängige zweckmäßig sein.)

Senkrecht zu g ist eine Anzahl enger Spalten S , Basis an g , auf der die Kurven tragenden Deckplatte angebracht, unter jedem Spalt eine Zunge Z , die durch Einstechen eines spitzen Metallgriffels in Spaltrichtung verschoben werden kann.

Nach Einstellung der Lineale wird E an die Basis des Spaltes gebracht, in dem addiert werden soll. Bei positiven Produkt wird dann am c -Lineal in die Zunge eingestochen und diese durch Herabziehen des Griffels

ungen wird schon ein roh aus Pappstücken gefertigtes Gerät gute Dienste leisten.

Zum Schluß darf noch der Sonderfall angeführt werden, daß Werte von Funktionen nur einer Veränderlichen addiert werden sollen:

$$\omega = \varphi(x_1) + \chi(x_2) + \psi(x_3) + \zeta(x_4) \dots$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ unabhängige Veränderliche. Hier wird man die Funktionsleitern direkt am Spalt anbringen, für jeden Spalt ein oder zwei Leitern (beiderseits oder nur auf einer Seite des Spaltes). Die Zunge ist in diesem Fall für alle Spalten gemeinsam.

Schwäb. Hall/Hessental.

H. Schminke.

Über druckpunkt feste Profile.

In der Strömungslehre sind Profile von Interesse, deren Auftriebsmittelpunkt bei Anstellwinkeländerungen nicht wandert (druckpunkt feste Profile). Es sind auch viele Profile dieser Art bekannt (vgl. etwa Fuchs-Hopf, Aerodynamik, Bd. II, Berlin 1934, oder Durand, Aerodynamic Theory, Bd. II, Berlin 1935). Ein Beispiel für ein solches Profil ist jedes symmetrische Profil (Abb. 1a), es gibt aber auch unsymmetrische Profile mit dieser Eigenschaft (Abb. 1b). Der Vergleich mit einem nichtdruckpunkt festen Profil (Abb. 1c) zeigt, daß das Hinterende des Profils bei 1b nach oben gebogen ist, wodurch es eine doppelte Krümmung erhält; man spricht deshalb von „S-Profilen“ oder „Profilen mit S-Schlag“.

Beim Betrachten des Bildes 1 erhebt sich die Frage, ob es außer den symmetrischen Flügelschnitten a) und

den S-Profilen b) auch Profile der Form c) gibt, die keine Druckpunktwanderung zeigen; ob also die S-Form des Beispiels b) in gewissem Sinne¹⁾ zur Erzeugung der Druckpunktfestigkeit notwendig ist.

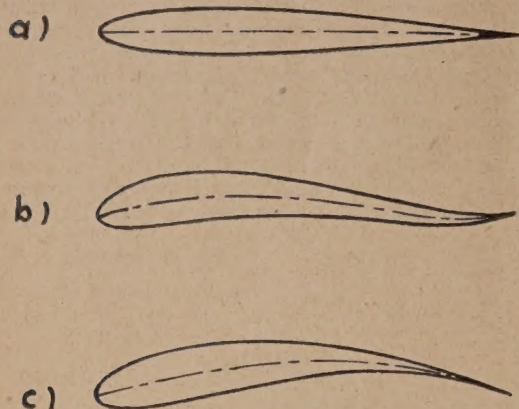


Bild 1

Diese Frage soll im folgenden untersucht werden, dabei wird der Begriff der „S-Form“ noch genauer präzisiert werden müssen²⁾.

Als Methode für diese Untersuchung wird die von Birnbaum³⁾ eingeführte Theorie der dünnen, schwachgewölbten Profile in zweidimensionaler, inkompressibler, stationärer und reibungsfreier Strömung verwendet. Man ersetzt dabei das Profil durch

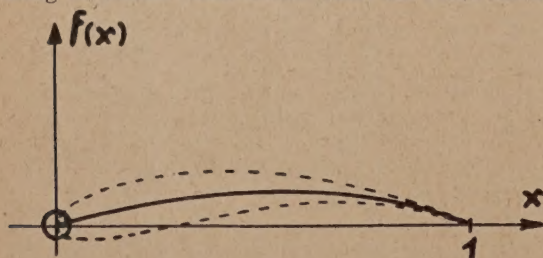


Bild 2

seine Mittellinie (Skelettlinie). Wie in Abb. 2 skizziert ist⁴⁾, möge sich die Profilmittellinie von $x=0$ bis $x=1$ erstrecken, sie werde analytisch durch $y=f(x)$ gegeben. Da es in der Birnbaumschen Theorie nicht auf eine Drehung und eine Parallelverschiebung ankommt, kann man $f(0)=f(1)=0$ wählen. Mit diesen Bezeichnungen ist nach Birnbaum³⁾ das durch $f(x)$ gegebene Profilskelett genau dann druckpunktfest, wenn das Moment um den Punkt $x=0,25$:

$$M(f) \equiv \int_0^1 \frac{x}{1-x} (3-4x) f'(x) dx \quad \dots (1)$$

verschwindet.

a) Bezeichnet man als „S-Form des Profilskeletts“ die Eigenschaft, daß $f(x)$ im Definitionsintervall verschiedenes Vorzeichen besitzt, wodurch also $f'(0)$ und $f'(1)$ gleiches Vorzeichen haben können (Bild 3a), so gibt es offenbar Profilmittellinien ohne S-Form, die nicht gerade sind und trotzdem keine Druckpunkt-

wanderung besitzen. Ein einfaches derartiges Beispiel ist (Bild 3b)

$$F(x) \equiv x(1-x)(39-111x+109x^2-36x^3)^5.$$

Diese Mittellinie ist druckpunktfest, wie man sich durch Einsetzen in (1) überzeugt, sie hat (vgl. Bild 3b) im Innern der Strecke $(0,1)$ positive Ordinaten, ferner ist $F'(0)=39>0$ und $F'(1)=-1<0$!

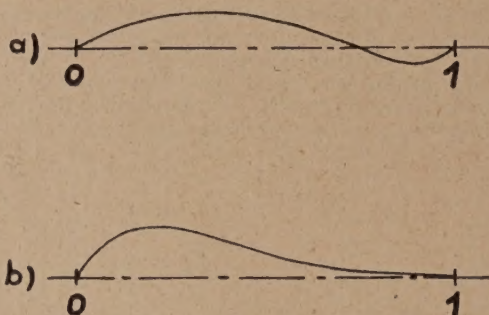


Bild 3

$F(x)$ besitzt jedoch auf der Strecke $(0,1)$ einen Wendepunkt (bei $x=5/12$). Nachdem nun nachgewiesen ist, daß es auch druckpunkt feste Profile gibt, deren Hinterende nicht „aufgebogen“ ist, erhebt sich sofort die weitere Frage, ob etwa der bei $F(x)$ vorhandene Wendepunkt für die Druckpunktfestigkeit dieses Profils verantwortlich ist. Stellt man diese Frage etwas allgemeiner, so lautet sie:

b) Kann eine Mittellinie druckpunktfest sein, die auf der Strecke $(0,1)$ keinen Wendepunkt besitzt?

Die für die analytische Behandlung des Problems zu treffenden mathematischen Voraussetzungen sind gering und in den Anwendungen immer erfüllt, da dort außer Knicken in der Profilmittellinie keine weiteren Singularitäten an dieser vorkommen. Aus Symmetriegründen genügt es offenbar, sich auf Profilskelette zu beschränken, die nach oben gewölbt sind. Man trifft folgende

Voraussetzungen: $f(x)$ sei im Intervall $<0,1>$ mit $f(0)=f(1)=0$ definiert und dort außer in den endlich vielen Punkten a_n ($n=1, \dots, N$) zweimal differenzierbar. In den Punkten a_n gelte

$$f'(a_n-0) - f'(a_n+0) = A_n \geq 0 \quad (n=1, \dots, N).$$

Weiter sei $f''(x) \geq 0$ und über $<0,1>$ integrierbar.

Behauptung: Es ist $M(f) \geq 0$, dabei tritt das Gleichheitszeichen nur für $f(x) \equiv 0$ ein.

Beweis: Man formt (1) durch teilweise Integration um und erhält

$$\left. \begin{aligned} M(f) &\equiv 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x} f''(x) dx \\ &+ 2 \sum_{n=1}^N A_n \sqrt{a_n(1-a_n)}. \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Nach Voraussetzung sind beide Summanden der rechten Seite von (2) positiv und verschwinden nur für $f''(x) \equiv 0$ und $A_n=0$ ($n=1, \dots, N$), was mit $f(x) \equiv 0$ gleichbedeutend ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es zeigt sich also, daß, außer der geraden Strecke, eine Profilmittellinie ohne Wendepunkt nicht druckpunktfest sein kann. Es erscheint daher sinnvoll, schon dann von einer „Mittellinie mit S-Form“ zu sprechen, sobald sie (mindestens) einen Wendepunkt besitzt. Mit dieser Sprechweise gilt dann:

Das einzige druckpunkt feste Profilskelett ohne S-Form ist die gerade Strecke.

Stuttgart.

Karl Nickel.

⁵⁾ Dieses Beispiel wurde der o. a. Dissertation von Herrn Horten entnommen, in der eine große Anzahl solcher Profilmittellinien angegeben und näher untersucht wird.

¹⁾ Wenn man nämlich von dem symmetrischen Profila) absieht.

²⁾ In seiner (unveröffentlichten) Dissertation hat Herr R. Horten u. a. auch diese Frage behandelt. Das hier abgeleitete Ergebnis wurde unabhängig davon gewonnen und ist dasselbe, wie es schon Herr Horten erhielt. Da dort jedoch wesentlich höhere Anforderungen an das Profil gestellt werden (u. a. sind Profile mit geknickter Mittellinie ausgeschlossen) und da die dortigen Ergebnisse mit einem erheblich größeren Rechenaufwand erhalten werden, mögen die nachfolgenden Überlegungen trotzdem mitgeteilt werden.

³⁾ W. Birnbaum, Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Diese Zeitschrift, Bd. 3 (1923), S. 290f.

⁴⁾ Zur besseren Veranschaulichung ist in Bild 2 noch gestrichelt eine Profilkontur eingezeichnet.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. Walter Weizel (o. Prof. der Physik a. d. Univ. Bonn), Lehrbuch der Theoretischen Physik. Zweiter Band: Struktur der Materie, XII + 767 S. mit 194 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis: brosch. 66,— DM.

Inhalt: Elementare Atomtheorie, Quantentheorie, Moleküle, Chemische Bindung, Statistik, Struktur und Eigenschaften der Gase, Struktur und Eigenschaften der zusammenhängenden Materie, Kernphysik, Elementarteilchen.

Diese Zusammenstellung der Kapitelüberschriften gibt zwar den äußeren Rahmen, der den Inhalt des Buches umspannt, gewährt aber keinesfalls einen vollständigen Eindruck von der Reichhaltigkeit des Inhalts. Man ist erstaunt über die Manigfaltigkeit der aufgeworfenen Probleme, wenn man das Buch im einzelnen durcharbeitet. Tatsächlich wird die gesamte moderne Atomtheorie umfaßt, und die Hauptprobleme sind lehrbuchmäßig in verständlicher Form abgehandelt. Dadurch nimmt das Buch unter den Lehrbüchern der theoretischen Physik eine Sonderstellung ein, denn es gibt in der deutschen Literatur kein Werk, das bei ähnlich geringem Umfang gleich reich an Inhalt ist.

In den wesentlichsten Teilen ist die Darstellung so ausführlich, daß fortgeschrittene Studenten leicht folgen können. Schwierigere Kapitel bzw. solche, in denen die Ableitungen nur angedeutet sind, tragen eine besondere Kennzeichnung. Wie im ersten Band stehen kurze Inhaltsangaben und eine Zusammenstellung der neu eingeführten Größen am Kopf der einzelnen Abschnitte. Auch viele Einzelheiten verdienen wegen ihrer Vorzüge besonders erwähnt zu werden. So wird das praktische Maßsystem mit vier Grundeinheiten in erfreulicher Konsequenz auch in der Atomtheorie angewandt; man findet z. B. nichts über eine angebliche Verletzung des Kausalitätsprinzips in der Quantenmechanik.

Nach Ansicht des Referenten hat das nun vollständig vorliegende Werk alle Eigenschaften, die es zu einem bevorzugten Standardlehrbuch für die Studenten der Theoretischen Physik machen können,

Dresden.

Recknagel.

Adalbert Duschek, Vorlesungen über höhere Mathematik. II. Bd. VI + 386 S. mit 125 Abb. Wien 1950. Springer-Verlag. Preis 26,— DM, geb. 29,— DM.

Erfreulich schnell ist dem ersten Band, der in dieser Zeitschrift Bd. 31, S. 58 besprochen wurde, der zweite gefolgt. Er bringt in seinen sechs Abschnitten zunächst einen Abriss der Theorie der unendlichen Reihen, insbesondere Potenz- und Fourierreihen. Es folgen die Differentiation und Integration bei Funktionen mehrerer Veränderlicher. Hier haben auch die wichtigsten Sätze über Kegelschnitte, Koordinatentransformationen, Abbildung von Ebenen und Räumen, einiges aus der Theorie der ebenen Kurven und die Grundbegriffe der Vektorrechnung ihren Platz gefunden. Besonders zu begrüßen ist die nun folgende Fortsetzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die bis zu den Theoremen von Bernoulli, Poisson und Bayes führt. Man kann dem Verfasser nur zustimmen, daß dieses Gebiet heute in die Grundvorlesung gehört. Es schließen sich ein kurzer Abriss der Ausgleichungsrechnung und der Annäherung empirischer Funktionen an. Der Rest des Buches ist der linearen Algebra (Determinanten, Matrizen, Tensoren) und der Tensoranalysis gewidmet. Dabei bevorzugt der Verfasser eine Darstellung, wie er sie in den von ihm gemeinsam mit A. Hochrainer verfaßten „Grundzügen der Tensorrechnung in analytischer Darstellung“ gegeben hat. Hier werden aber die „symbolische“ Schreibweise (Bezeichnung der Vektoren

mit deutschen Buchstaben usw.) und die „symbolfreie“ (mit Indizes) nebeneinander verwendet, damit sich der Leser selbst ein Urteil über deren Vorzüge bilden möge. Den Aufgaben des Textes sind wiederum die Lösungen beigegeben.

Auch dieser Band besitzt die Vorzüge des ersten: die Darstellung ist im besten Sinne modern. Die Studierenden der angewandten Mathematik, Physik und der Ingenieurwissenschaften sowie der in der Praxis stehende Forscher finden in diesem Buche erstmalig manches, was sonst nicht in Lehrbüchern für diesen Benutzerkreis aufgenommen zu werden pflegte. Ihnen allen kann das Werk bestens empfohlen werden.

Aachen.

Günther Schulz.

Ernst Suter, Die Methode der Festpunkte. Vereinfachtes Verfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen mit Beispielen aus der Praxis, insbesondere von Stahlbetontragwerken. Dritte, neu bearbeitete Aufl. von Dipl.-Ing. Ernst Traub. XIX + 216 S. mit 232 Abb. und 7 Tafeln. Berlin 1951. Springer-Verlag. Preis geb. 21,— DM.

Die Statik neigt in ihren Berechnungsmethoden immer mehr nach der analytischen Seite. Dadurch geht oft die Anschaulichkeit verloren und Fehlerquellen können sich leichter ausbreiten. Um so mehr ist es zu begrüßen, wenn bewährte graphische Methoden für die gegenwärtigen Bedürfnisse der Praxis weiterentwickelt werden. Das ist in der dritten Auflage des Buches von Suter über die Methode der Festpunkte geschehen, die von einem erfahrenen Praktiker des Stahlbetonbaues, Dipl.-Ing. Traub, ganz neu bearbeitet wurde.

Das bekannte Seilpolygonverfahren — von Culmann, Mohr und Ritter in seiner klassischen Fassung herausgebracht — führt bei der Berechnung durchlaufender Träger zu den sogenannten Festpunkten. Es ist seinerzeit von Suter auf die Rahmentragwerke erweitert worden, konnte sich aber in der Praxis nie ganz durchsetzen, da die Ermittlung der Festpunkte, der Verteilungsgrößen und der Übergangszahlen etwas zeitraubend ist. Durch eine Arbeit von Guldán über Rahmentragwerke und Durchlaufträger sind wesentliche Vereinfachungen bekannt geworden, die Traub mit Vorteil auswertet.

Gegenüber der zweiten Auflage ist nicht vom allgemeinen Fall der Tragwerke mit veränderlichem Trägheitsmoment ausgegangen, sondern von den in der Praxis am meisten vorkommenden Tragwerken mit von Stab zu Stab veränderlichem, aber auf Stablänge konstantem Trägheitsmoment. Dadurch ist das Einarbeiten in diese Methode sehr erleichtert. Im übrigen ist das Verfahren einfach und übersichtlich, die Berechnung kann teils analytisch, teils graphisch durchgeführt werden, so daß in jedem Stadium der Berechnung der Verlauf der Kräfte verfolgt und demzufolge auch leicht nachgeprüft werden kann. Gut gewählte Beispiele aus der Praxis des Stahlbetons, Hilfstafeln und Richtlinien für die praktische Aufstellung der Berechnung ergänzen das Buch.

Dresden.

Henn.

F. Schwank, Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis für Physiker, Mathematiker und Ingenieure. VI + 406 S. m. 147 Abb. Leipzig 1951. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis 22,80 DM.

Das Buch hat sich die Aufgabe gestellt, dem in der Praxis stehenden Ingenieur, einen Überblick über die Lösungsmethoden von Problemen zu geben, die an ihn herantreten, und die ein mathematisches Wissen

erfordern, das über seine von der Hochschule mitgebrachten Kenntnisse hinausgeht, insbesondere soweit es sich dabei um Randwertprobleme und ähnliche Fragen handelt. Das Buch ist also kein Lehrbuch. Es bringt nur das Wichtigste ohne großen Wert auf systematische Darstellung zu legen, Konvergenzweise zu bringen usw. Es will nur eine Einführung in die Probleme und ihre Lösungsmethoden geben und durch ausführliche Schrifttumsnachweise den Weg zu eingehenderem Studium weisen. Die Kapitelüberschriften mögen einen Anhalt dafür geben, welcher Stoff behandelt wurde: Randwertprobleme, Funktionen komplexer Veränderlicher, Partielle Differentialgleichungen (das umfangreichste Kapitel, dem über ein Drittel des Buches gewidmet ist), Integral-

gleichungen, Variationsrechnung, Differenzengleichungen. In Anhängen werden einige mathematische Ergänzungen gebracht, die dem Ingenieur von der Hochschule her geläufig sein sollten. Im allgemeinen scheint mir die Stoffauswahl den Bedürfnissen des Ingenieurs Rechnung zu tragen, wenn auch der eine oder andere Wunsch offen bleibt. So scheint es mir z. B. wünschenswert, daß auf die Charakteristiken-theorie eingegangen wird. Die Darstellung ist gut lesbar und die vorausgesetzten Kenntnisse im allgemeinen denen des Kreises, für den das Buch geschrieben ist, angepaßt. Es wird manchem eine Hilfe sein und ihn zu eingehenderem Studium anregen.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr.-Ing. Karl Klotter (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe), Technische Schwingungslehre. Bd. I: Einfache Schwinger und Schwingungsmeßgeräte. 2. umgearbeitete und ergänzte Auflage, XVI + 399 S. mit 360 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951. Springer-Verlag. Preis: 43,50 DM.

Dr. F. Hund (o. Prof. a. d. Univ. Jena). Einführung in die theoretische Physik. Bd. I: Mechanik, 3. ergänzte Auflage, 304 S. mit 128 Abb. Bd. II: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 2. ergänzte Auflage, 299 S. mit 75 Abb. Bd. III: Optik, 2. ergänzte Auflage, 210 S. mit 100 Abb. Leipzig 1951. Bibliograph. Institut (VEB). Preis: geb. je 6,50 DM.

P. Frauenfelder (Prof. a. kantonale Technikum in Winterthur) und **Dr. P. Huber** (o. Prof. a. d. Univ. Basel), Einführung in die Physik. Bd. I: Mechanik, Hydromechanik, Thermodynamik, 492 S. mit 391 Abb. München/Basel 1951. Ernst Reinhardt-Verlag. Preis: geb. 16,50 DM.

Dr. W. Lietzmann (Prof. a. d. Univ. Göttingen). Methodik des mathematischen Unterrichts. Der Lehrstoff. 208 S. Heidelberg 1951. Quelle & Meyer. Preis geb. 13,80 DM.

L. P. Wheeler. Josiah Willard Gibbs, The History of a great Mind. XII + 264 S. New Haven 1951. Yale University Press. Preis 4\$.

NACHRICHTEN

Stuttgart: Am 30. Juni 1951 verstarb der o. Prof. i. R. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart Dr.-Ing. e. h., Dr. techn. e. h. Fritz Emde.

Göttingen: Dr. Manfred Schäfer habilitierte sich an der Universität Göttingen für das Fach „Angewandte Mechanik“.

Frankfurt/Main: Dr. Ewald Burger habilitierte sich an der Universität Frankfurt/M. für das Fach Mathematik.

Dresden: An der Techn. Hochschule Dresden habilitierte sich Dr. Krienes für das Fach Mechanik, insbesondere Strömungslehre.

Druckfehlerberichtigung

In dem Vortragsbericht **M. Herbeck**, Der Wärmeaustausch zwischen einem geheizten Band und einer Konvektionsströmung. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 258–260.

Es muß in Formel

$$(3) \cos^2 \vartheta \quad \text{durch} \quad \sin^2 \vartheta$$

$$(8b) 0,198 \bar{b}^{2/3} \quad \text{durch} \quad 0,198 \bar{b}^{-2/3}$$

$$0,043 \bar{b}^2 \quad \text{durch} \quad 0,043 \bar{b}^{-2}$$

ersetzt werden.

Herbeck.

Zu **W. Haacke**: Bemerkungen zur Stabilisierung eines physikalischen Pendels I. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 161–169.

Es muß heißen:

$$S. 163. 2. \text{ Zeile von unten: } x = -\frac{4\lambda}{\gamma}.$$

$$S. 164. 1. \text{ Zeile von oben: } y = \frac{A}{l}.$$

S. 164. 12. Zeile von unten:

$$\varphi'' + 2\kappa\varphi' + \left(\frac{A}{l} \cos u - \frac{g}{4\pi^2 n^2 l}\right) \cos \alpha \cdot \varphi = 0.$$

S. 164. Letzte Zeile:

$$x_{se_2} = -4 \frac{\kappa^2 + 1}{y} + \frac{y}{3} - \frac{5}{864} y^3 + \dots$$

S. 165. 17. Zeile von oben. Die erste Summe lautet:

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_{\kappa} e^{i\kappa u}.$$

S. 165. 18. Zeile von oben. Beim ersten Summanden in der [] fehlt der Index κ .

Zu **W. Szablewski**: Berechnung der turbulenten Strömung im Rohr auf der Grundlage der Mischungsweghypothese. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 131–142.

Es muß heißen:

$$S. 131, I. \text{ Bezeichnungen: } \eta = 1 - \frac{r}{r_0}.$$

S. 139, Formel (30):

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} - \frac{2}{\kappa} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\kappa} \right) \frac{1}{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} \frac{v_* y}{\nu} + \left[\frac{v_* \delta_0}{\nu} - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln 4\kappa \right].$$